La ricerca in Didattica della Matematica: Una responsabilità dei matematici

Research in Mathematics Education: A responsibility of mathematicians

Bruno D'Amore[1,2] e Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]
[1]*Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*
[2]*Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Bologna, Italia*

Sunto. *In alcuni paesi rimane ancora una sorta di avversione verso la ricerca in Didattica della Matematica. Alcuni matematici non ne apprezzano il contenuto, ritenendolo più appropriato per pedagogisti o psicologi. In questo articolo, gli autori propongono alcuni esempi di ricerca che dimostrano che una seria ricerca in Didattica della Matematica deve necessariamente essere fatta da matematici.*

Parole chiave: ricerca in Didattica della Matematica, scopi della Didattica della Matematica, contenuti della Didattica della Matematica.

Abstract. *In some countries there is still a kind of aversion towards research in Mathematics Education. Some mathematicians do not appreciate its content, considering it more appropriate to pedagogists or psychologists. In this paper, the authors offer some examples of research showing that a serious research in Mathematics Education must necessarily be done by mathematicians.*

Keywords: research in Mathematics Education, aims of Mathematics Education, contents of Mathematics Education.

Resumen. *En algunos países todavía hay una especie de aversión a la investigación en Educación Matemática. Algunos matemáticos no aprecian su contenido, considerándolo más apropiado para pedagogos o psicólogos. En este artículo, los autores proponen algunos ejemplos de investigación que muestran que la investigación seria en Educación Matemática debe ser necesariamente realizada por matemáticos.*

Palabras claves: investigación en Educación Matemática, objetivos de la Educación Matemática, contenidos de la Educación Matemática.

1. Premessa

Questo articolo, più che un lavoro di ricerca, è un *pamphlet*, o un *position paper*, le cui argomentazioni sono fondate su risultati di ricerche precedenti opportunamente citate. La querelle che propone è relativamente nuova, se non altro per la trattazione strutturata nella quale si presenta, anche se il tema è oggetto frequente di discussioni informali a più livelli. L'idea che lo sorregge e che l'ha generato è legata a un tentativo di dare una risposta il più possibile definitiva, citando esempi, a una domanda spesso oggetto di discussione, se cioè la figura del matematico sia la più appropriata a fare ricerca (e più in generale attività) nel campo della Didattica della Matematica e non, piuttosto, uno studioso di settori più generalisti, come un pedagogista o uno psicologo.

In più occasioni ci è capitato di verificare che vi sono matematici docenti universitari che neppure sanno che esiste una disciplina a sé stante, che si chiama "Didattica della Matematica", dotata di dignità accademica, tanto da essere denominazione di uno specifico corso di studi o nella laurea di base in Matematica o in quella magistrale in Matematica o nel corso di laurea per la formazione di futuri docenti di scuola primaria o in corsi post laurea di formazione di futuri docenti o di docenti in servizio. Essi confondono spesso la denominazione specifica e di senso ben connotato "Didattica (della Matematica)" con il termine generico "didattica" che spesso è considerato sinonimo di "ore dedicate all'insegnamento", dunque confondono una disciplina specifica di ricerca, scientificamente ben strutturata a livello internazionale, che si basa sul lavoro assiduo di una folta schiera di ricercatori di tutti i continenti con un'attività di routine comune a tutti i docenti, cioè con un'attività lavorativa per svolgere la quale di solito si reputa sufficiente essere padroni della materia insegnata.

Forse la colpa di tutto ciò sta nella denominazione data alle origini a tale disciplina, nata ufficialmente a metà degli anni '80 del XX secolo (e dunque non ancora giunta al suo mezzo secolo di vita ufficiale). Quando i suoi creatori le diedero quel nome, Didattica della Matematica, di certo non immaginavano la confusione descritta sopra, che si sarebbe creata e protratta per decenni. Diffusa in tutti i paesi, la traduzione della sua denominazione nelle varie lingue rispecchia più o meno le stesse problematiche: Didactique des Mathématiques (denominazione originale, visto che è nata in Francia), Mathematics Education, Educación matemática, Didaktik der Mathematik, Didática da Matemática e così via.

Altri confondono questo tipo di interessi con la Pedagogia, credendo che sia più congeniale delegare a quel mondo le problematiche aventi a che fare con tutto ciò che riguarda la scuola; ma la Didattica della Matematica va considerata invece, come mostreremo in questo testo, un'attività di ricerca di stampo matematico, per fare la quale (ricerca) servono matematici professionisti formati in modo specifico.

Non in tutti i paesi del mondo questo modo di vedere è stato già definitivamente accettato e tuttavia è assai e sempre più diffuso

In Italia, per esempio, la Didattica della Matematica fa parte del raggruppamento disciplinare MAT/04 (creato dal MIUR, Ministero dell'Università e della Ricerca), dunque fa ufficialmente parte pienamente della Matematica:

- MAT/01 Logica matematica
- MAT/02 Algebra
- MAT/03 Geometria
- MAT/04 Matematiche complementari (comprende i seguenti corsi universitari: Matematiche elementari da un punto di vista superiore, Matematiche complementari, Didattica della Matematica, Storia della Matematica e altri)
- MAT/05 Analisi matematica
- MAT/06 Probabilità e Statistica
- ...

Esistono corsi di Didattica della Matematica che si possono seguire dopo aver ottenuto il titolo di laurea in Matematica: laurea magistrale in Matematica con indirizzo didattico, master in Didattica della Matematica, dottorato in Didattica della Matematica.

Ancora dibattuto è il tema della tipologia della nostra disciplina; secondo chi qui scrive, la Didattica della Matematica appartiene alla tipologia della cosiddetta Matematica applicata. [Su una breve storia della Didattica della Matematica e sull’evoluzione dell’idea di Matematica applicata, si veda D’Amore e Sbaragli (2020)].

A conferma di questo modo di intendere le cose, nel luglio del 2006 si tenne presso il Dipartimento di Matematica dell’Università di Torino un convegno internazionale su *La matematica e le sue applicazioni*, dunque un convegno di Matematica applicata: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. La Didattica della Matematica fu considerata come una “Matematica applicata alle problematiche dell’apprendimento” (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2007).

Gli Atti di quel *panel* furono pubblicati in un numero speciale della rivista *La matematica e la sua didattica*; l’editor fu Ferdinando Arzarello, che divenne pochi anni dopo presidente dell’ICME (International Congress on Mathematical Education) (dal 2013 al 2016). [Su una breve storia dell’ICME, il cui primo presidente fu il matematico tedesco Felix Klein, si veda ancora D’Amore e Sbaragli (2020)].

A seguito del tema di ricerca presentato in quella occasione, si realizzarono varie pubblicazioni e due dottorati di ricerca, uno in Italia e uno in Colombia.

La confusione fra Didattica della Matematica e Pedagogia è così fortemente ancora viva, che abbiamo pensato di dedicare le pagine che seguono a illustrare alcune ricerche in Didattica della Matematica per capire il senso delle quali è necessaria una competenza matematica professionale, da matematici, né da docenti di scuola né da pedagogisti. La Pedagogia è stata molto utile nelle fasi iniziali, quando per la Didattica della Matematica si sono dovute creare dal nulla basi solide scientifiche per delineare le specificità delle sue ricerche. Si è attinto ovviamente dalla Matematica, dall'Epistemologia della Matematica e dalla Storia della Matematica, ma anche dalla Pedagogia, dalla Didattica Generale, dalla Psicologia, dalla Semiotica, dalla Filosofia, dalla Linguistica … e da altre discipline per evidenziare prima e fondare poi alcuni concetti di base della Didattica della Matematica. È stato uno sforzo corale dei primi ricercatori in Didattica della Matematica, durato alcuni decenni, che, in certe direzioni e per certe discipline, ancora è in atto. Ma ora la Didattica della Matematica ha un suo status scientifico proprio; per cui troviamo ridicolo che in alcuni paesi del mondo e secondo alcuni docenti universitari, si possa sostenere la tesi che, per la formazione dei futuri insegnanti di Matematica la sequenza idonea possa essere la semplicistica seguente: prima severi e ben fondati studi di formazione in Matematica e poi studi di Pedagogia.

Mentre sul primo punto siamo pienamente d'accordo) (Fandiño Pinilla, 2011), sul secondo dissentiamo totalmente, non perché la Pedagogia non sia interessante, coinvolgente o utile, ma per due motivi:

a) tutto quel che di Pedagogia serve (teoricamente ed empiricamente) nella ricerca scientifica e nella pratica didattica quotidiana scolastica è già stato evidenziato e immesso nella Didattica della Matematica;
b) nella Didattica della Matematica c'è molto di più, c'è tutto quel che serve professionalmente a una persona esperta in Matematica (davvero esperta) a compiere le azioni professionali necessarie per far sì che i propri studenti possano apprendere la Matematica.

Si noti bene: il problema di fondo non è come-cosa-quando insegnare Matematica, ma far sì che gli studenti la apprendano.

Per cui la nostra proposta nel punto b), successivo ad a), è la seguente: un corso vero, profondo, tecnico di Didattica della Matematica, ma tenuto da chi è esperto specifico in questa disciplina, non un docente universitario qualsiasi (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013).

Dunque, presenteremo di seguito alcune ricerche empiriche condotte a diversi livelli scolastici su alcuni temi che, talvolta a sorpresa, si sono rivelati di complessa gestione da parte degli studenti.

Non lo diremo espressamente punto per punto, esempio per esempio, lo diciamo qui, una volta per tutte: se l'analisi di queste difficoltà di apprendimento dovessero essere affrontate, capite e risolte da parte di un pedagogista, esperto in Pedagogia, ma non esperto in Didattica della Matematica, non ci sarebbero speranze, secondo noi, di venire a capo del problema. Solo un matematico esperto, ed esperto specificamente in Didattica della Matematica, può capire fino in fondo le motivazioni, le cause delle difficoltà dello studente e dunque, sulla base dei suoi studi specifici, tentare di trovare un rimedio per favorire l'auspicato apprendimento da parte dello studente.

Abbiamo più volte affermato che la Didattica della Matematica va considerata come una teoria scientifica di per sé, autonoma. Siccome la certificazione di "scienza" ancora oggi è data quasi sempre in modo corale ma spesso non universale, vogliamo qui esporre esplicitamente ma molto brevemente il nostro modo di vedere le cose, rinviando per approfondimenti a D'Amore (2001a, 2007).

Il termine "teoria scientifica" o "scienza" è generalmente riservato a ogni rappresentazione (simbolica, astratta, scritta, …) condivisa, coerente e plausibile, di un insieme di fenomeni tra loro correlati da relazioni causali, descrivibili, significative (causa-effetto, deduzione, induzione, …).

Tralasciando per brevità il percorso arcaico dell'idea di scienza, nei modi attuali di considerare una teoria scientifica si trova la nozione di "paradigma" (Thomas Kuhn); si intende con "paradigma" l'insieme delle ipotesi teoriche generali e l'insieme delle leggi per le loro applicazioni, comunemente accettate dagli appartenenti a una stessa comunità scientifica, e implicanti un sostanziale accordo nei giudizi professionali, di merito e di pertinenza. Nella formazione di una nuova comunità scientifica, c'è un momento a partire dal quale si può parlare appunto di "paradigma"; la fase che precede è caratterizzata da una disorganizzazione, priva di accordi specifici, e con una costante richiesta di dibattito sui fondamenti della disciplina stessa: si può dire che in questa fase vi sono tante teorie quanti ricercatori e una continua richiesta ed esigenza di chiarire i punti di vista propri e altrui. I lavori scritti di ricerca nel campo sono spesso accompagnati da spiegazioni sui caratteri generali della ricerca stessa. La tesi di Kuhn (1957) più famosa è quella secondo la quale il progresso scientifico procede secondo "rivoluzioni", dato che si ha passaggio, evoluzione, solo dopo una crisi.

Un altro ben noto contributo fondamentale è quello proposto negli anni '60 da Imre Lakatos, con l'idea di "programma di ricerca", cioè una successione di teorie scientifiche collegate tra loro in uno sviluppo continuo, contenenti regole metodologiche di ricerca (sia in positivo, da seguire, sia in negativo, da evitare). Ogni programma deve allora contenere: un nucleo o centro del programma; un sistema di ipotesi ausiliarie; una euristica, cioè i procedimenti che si applicano alla risoluzione dei vari problemi. In questa successione, una nuova teoria si può allora considerare un progresso rispetto a una precedente se: fa predizioni che la precedente non era in grado di fare; alcune di tali predizioni si possono provare come vere; la nuova teoria spiega fatti che la precedente non poteva provare (Lakatos & Musgrave, 1960).

Un altro notevole contributo teorico ben noto è quello dovuto a Mario Bunge, negli anni '80: la scienza è un corpo in costante accrescimento di conoscenze, caratterizzato dal fatto di trattare di conoscenze razionali, sistematiche, esatte, verificabili (e dunque anche fallibili). La conoscenza scientifica coincide con l'insieme delle idee su un certo argomento, stabilite in modo momentaneamente provvisorio; ma poi, il concorso dei singoli e lo scambio di informazioni e di idee dà luogo a una comunità scientifica. Quel che caratterizza la differenza tra campi di credenza (religioni, ideologie, politiche, ...) e campi di ricerca scientifica è il tipo di modalità secondo le quali avvengono i "cambi" nelle idee; nei primi, i cambi avvengono a causa di "rivelazioni", controversie, pressioni sociali; nei secondi c'è un cambio continuo a causa degli stessi risultati della ricerca (Bunge, 1985).

Secondo richieste più "deboli", una teoria scientifica si definisce oggi tale quando dispone di un oggetto specifico di studio, di un suo proprio metodo di ricerca e di un suo specifico linguaggio condiviso; a questa richiesta fanno spesso riferimento i teorici delle scienze umane, per chiamare "scienze" appunto, tali domini di studio. Questa richiesta "debole" ha fatto proliferare negli ultimi anni l'appellativo di "scienze" dato a molte discipline. Infatti, qualsiasi disciplina allo sviluppo della quale concorrano studiosi che si riconoscano e si accettino reciprocamente come esperti in essa, fondando una comunità di pratiche condivise, che facciano uso dello stesso linguaggio, prima o poi acquisisce proprio le caratteristiche appena descritte. Il problema della ripetibilità degli esperimenti, della corretta definizione delle variabili in gioco, del senso che acquistano termini come "rigoroso", "vero" ecc., tende a svanire o a subire profonde modifiche.

Naturalmente non possiamo non porre alla base delle precedenti riflessioni il lavoro pionieristico di Karl Popper, sia perché riteniamo di poterlo/doverlo considerare il padre fondatore di tutte le nuove interpretazioni teoriche successive al suo lavoro, sia per la forte influenza che la sua speculazione ha avuto anche in campi assai diversi, godendo di un'immensa popolarità (ci limitiamo a citare Popper, 1934).

Quel che c'è di comune in tutte queste interpretazioni è che le teorie scientifiche non possono essere creazioni o invenzioni di un singolo, ma deve esserci una comunità di persone tra le quali vige un sostanziale accordo sia sui problemi significativi della ricerca, sia sulle modalità nelle quali essa si esplica, sia sul linguaggio usato. In questa direzione, Thomas Albert Romberg, alla fine degli anni '80 (Romberg, 1988), per definire le caratteristiche peculiari di una teoria scientifica consolidata e stabile, affermava che:

- deve esistere un insieme di ricercatori che dimostrino interessi in comune; in altre parole, ci devono essere problematiche centrali che guidano il lavoro dei ricercatori e che siano condivise;
- le spiegazioni date dai ricercatori devono essere di tipo causale;
- il gruppo dei ricercatori deve aver elaborato un vocabolario e una sintassi comuni, sui quali il gruppo è d'accordo;
- il gruppo deve aver elaborato procedimenti propri per accettare o refutare gli enunciati in un modo considerato da tutti oggettivo e largamente condivisibile; per esempio la funzione dei referee negli usuali sistemi di

accettazione degli articoli su una rivista seria e la disposizione positiva degli autori a intervenire sulle loro raccomandazioni o richieste di modifica.

Tra le scienze così intese, ben rientrano le didattiche disciplinari e in particolare la Didattica della Matematica. È infatti sotto gli occhi di tutti l'esistenza di un folto gruppo internazionale di ricercatori in Didattica della Matematica che hanno interessi comuni, per i quali esistono problematiche considerate centrali e condivise, che danno (da vari decenni) spiegazioni di carattere causale, che hanno elaborato un vocabolario comune, condiviso; essi hanno convegni specifici e loro riviste specifiche, all'interno dei quali le proposte di comunicazione o di pubblicazione vengono vagliate in base a procedimenti oramai ampiamente condivisi. Siamo dunque in pieno nelle condizioni proposte da Romberg per poter affermare che la Didattica della Matematica ha tutte le caratteristiche per poter essere considerata una scienza consolidata e stabile.

E veniamo allora, di seguito, a una successione di esempi che abbiamo scelto come paradigmatici per, come abbiamo già annunciato, cercare di mostrare come sia necessario che a svolgere ricerca in Didattica della Matematica siano dedicati matematici esperti e non altro genere di studiosi.

2. Il limite, uno dei concetti chiave della matematica – uno degli ostacoli più comuni e diffusi nell'apprendimento della matematica

Crediamo che a tutti noi, docenti universitari di Matematica, sia capitato almeno una volta nella vita di dover spiegare a giovani studenti l'idea di limite di una funzione $f(x)$ per x che tende a un certo x_0; e ciò capita a tutti i docenti di scuola secondaria di II grado, quando gli studenti hanno fra i 16 e i 18 anni.

Il traguardo è spiegare e far apprendere, con tutti i dettagli del caso, la seguente definizione, considerata sufficientemente corretta dal punto di vista formale:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \quad \leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Ci dice l'esperienza e ci dicono i colleghi di scuola secondaria che tale formula è impossibile da far accettare, capire, far propria da parte degli studenti (il caso positivo è definito "assai raro"); cosicché si scende di livello formale e si propone una spiegazione a parole della formula precedente, di solito, più o meno, una cosa del genere seguente che altro non è se non la traduzione della formula precedente in parole più o meno ordinarie del linguaggio comune:

ℓ è il limite di $f(x)$ per x che tende a x_0 se per ogni numero reale $\varepsilon > 0$

esiste un altro numero reale positivo δ tale che, se $0<|x-x_0|<\delta$, allora $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Se per caso si ha ancora fallimento (colleghi di scuola secondaria ci dicono che il miglioramento di comprensione è di circa lo 0%), si prosegue proponendo un'altra traduzione in un linguaggio ancora più vicino a quello che abbiamo già definito "comune":

Sia data una funzione $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathbb{R}$ definita su un sottoinsieme X di $\mathbb{R}$ e un punto di accumulazione x_0 di X. Un numero reale ℓ è il limite di $f(x)$ per x tendente a x_0 se, fissato arbitrariamente un valore ε della distanza tra $f(x)$ e ℓ, si riesce a trovare, in corrispondenza di questo, un valore δ della distanza tra x e x_0 per il quale per tutti gli x, escluso x_0, che distano da x_0 meno di δ, si ha che $f(x)$ dista da ℓ meno di ε.

Spiegazioni sempre più vicine al linguaggio ordinario perdono (un po' di) rigore, ma avvicinano almeno un sottoinsieme non vuoto di studenti della classe alla comprensione; e poi esempi concreti, grafici, disegni opportuni, esercizi aiutano ancora di più. (Sugli aspetti di Storia della Matematica connessi con l'evoluzione del concetto di limite, si veda D'Amore e Sbaragli, 2020).

E tuttavia, tutti gli studi del settore confermano che la comprensione e l'apprendimento (sono due cose ben diverse) sono piuttosto rare; lo studente può anche apprendere a risolvere esercizi (si tratta di ripetere in modalità opportune formalismi e algoritmi) e questo tranquillizza il docente, ma la reale comprensione dell'oggetto matematico in questione è sempre piuttosto rara.

Una spiegazione del fenomeno richiederebbe ora una lunga dissertazione su un tema di Didattica della Matematica ideato da Guy Brousseau, la cosiddetta "teoria degli ostacoli epistemologici"; ma sulla spiegazione tecnica del fenomeno non entriamo in dettagli, rinviando semmai a D'Amore (1999). Ci basta far sapere all'eventuale lettore matematico non esperto in Didattica della Matematica che si riescono a dare oggi, grazie alla ricerca, spiegazioni scientifiche che stanno alla base dei fallimenti apprenditivi. (Non si tratta necessariamente di mancanza di cultura pregressa, scarsa intelligenza o cattiva disponibilità, come taluni ingenuamente credono).

Su questo imbarazzante insuccesso così internazionalmente diffuso hanno lavorato vari ricercatori (matematici impegnati nella ricerca in Didattica della Matematica), è un tema considerato classico. Noi ci limitiamo a ricordare i lavori di David Tall che mette in evidenza una difficoltà più generale di carattere epistemologico, sulla quale non entriamo in dettagli e che ci limitiamo ad accennare. Nella definizione abbiamo la presenza contemporanea di due tipologie di infinito in perenne contrasto fra loro, l'infinito attuale e l'infinito potenziale: "punto di accumulazione" è infinito attuale, "tendente a" è infinito potenziale (Tall & Vinner, 1981). Si veda anche Bagni (2001).

Ora, gli studi più generali su tale tema sono assai coltivati e diffusi; per esempio, i seguenti sono altri esempi di ostacoli relativi all’apprendimento dell’infinito:[1]

- confusione fra termini considerati da molti equisignificanti all’ “apeiron” greco, cioè i seguenti: illimitato, indefinito, infinito, tra loro erroneamente equiparati;
- l’infinito come numero naturale *grande*.

Lunghe e dettagliate ricerche hanno portato a rivelare due convinzioni che sono radicate nello studente anche maturo (e anche in taluni docenti):

- *appiattimento*: tutte le cardinalità infinite sono uguali; cioè: tutti gli insiemi infiniti possono essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro;
- *dipendenza*: la cardinalità dipende dall’estensione geometrica; per esempio, ci sono più punti in un segmento “lungo” piuttosto che in uno “corto”.

Si possono vedere le ricerche di Arrigo e D’Amore (1998, 1999, 2002, 2004).

Questi studi hanno spinto i ricercatori a confezionare lavori più didatticamente concreti, destinati agli insegnanti più che a colleghi ricercatori, cioè facendo uso dei risultati delle ricerche per produrre materiali di riflessione che possano aiutare gli insegnanti nel loro lavoro quotidiano; si veda, per esempio: Arrigo, D’Amore e Sbaragli (2020).

Che la questione sia talvolta fuori della portata cognitiva non solo degli studenti, ma anche culturale di alcuni docenti, è documentato da un’altra ricerca (D’Amore et al., 2004) nella quale si analizzano le frasi usate dai docenti in aula su questi temi, paragonandole a quelle pronunciate dagli studenti, intervistati separatamente.

E da quel che due celebri autori scrivono a pagina 7 di un libro di testo scolastico italiano destinato agli studenti di scuola secondaria di II grado: “Un insieme si dice infinito quando contiene infiniti elementi”.[2]

Da tutto ciò risulta ovvio che siamo di fronte a un grave problema di carattere matematico, prima che apprenditivo.

Per quanto riguarda la frase relativa agli insiemi infiniti di pagina 7 del famoso libro di testo, abbiamo sempre sperato che fosse una scelta consapevole deliberata ma non dichiarata degli autori, per costringere gli insegnanti a parlare con i propri studenti del problema della definizione classica euclidea (per genere prossimo e differenza specifica), per spiegare i termini *definiendum* e *definiens* … Ma forse ci illudiamo, forse è davvero uno scivolone.

---

[1] Noi ci limitiamo a citare come problematica allo stesso tempo epistemologica e didattica (come spesso accade) l’infinito, ma di grande rilevanza su entrambi i fronti è il problema della continuità, sul quale qui sorvoliamo.

[2] È per noi sorprendente che qualcuno adotti un simile libro di testo per i propri studenti.

Si noti come, per parlare, anche solo scherzosamente, di Didattica della Matematica bisogna sapersi orientare non solo in Matematica, ma anche nella sua storia e nella sua epistemologia. Su questi argomenti si veda D'Amore e Sbaragli (2017).

Il che ci riporta daccapo: per capire la problematica celata nel mancato apprendimento di questo genere di temi, occorre la competenza di chi questi temi conosce in modo profondo, e non di chi è esperto in generici problemi di mancato apprendimento o di realtà scolastica o di questioni pedagogiche, interessanti ma generiche. Non solo il ricercatore in questo campo deve essere competente in Matematica, come potrebbe esserlo, come spesso lo è, un docente di scuola secondaria di II grado; deve essere qualcuno che quotidianamente ha a che fare professionalmente con la Matematica, che sia un ricercatore in Matematica, per il quale la Matematica sia parte attiva nella sua vita, che non si limiti cioè ad averla studiata, ma che la frequenti in modo profondo, che l'abbia fatta propria, che l'abbia almeno in certe occasioni creata. Dunque, un matematico vero, non un esperto in altre discipline, prestato occasionalmente alla Matematica.

Resta da definire che cosa noi intendiamo per "matematico"; ma abbiamo la fortuna di possedere già una proposta di definizione data da un gigante della Matematica, Jean Dieudonné (1987, cap. 1): un matematico è "quelqu'un qui a publié au moins la démonstration d'un théorème non trivial".

Prendiamo per ora questa, per buona, ma poi dovremo aggiungere quei matematici che lavorano in Matematica applicata (e dunque non dimostrano teoremi), e dunque anche i matematici didatti, che Dieudonné non poteva prendere in considerazione per motivi cronologici.

3. Una ricerca sulla comprensione della dimostrazione di un teorema di Cantor: La somma di competenze su specifici argomenti non garantisce la competenza su argomenti che sono la somma di quelli

Quando ci avviciniamo alla storia della matematica, una delle questioni che più sorprendono e appassionano è il contenuto di una celebre e straordinaria lettera di Georg Cantor a Richard Dedekind, inviata da Halle il 29 di giugno del 1877.

Dato che Dedekind ritardava a dar risposta a un problema che gli aveva proposto il 25 di giugno, Cantor, dopo soli 4 giorni, e chiedendo scusa della propria ansia, propone con forza, nella lettera del 29 giugno, una nuova domanda, dichiarando di aver la necessità di ricevere l'opinione di Dedekind.

Quasi all'inizio di questa nuova lettera (scritta in tedesco), Cantor scrive (in francese) la famosa frase: "Fintanto che voi non l'approviate, io non posso che dire: lo vedo ma non lo credo" (Arrigo & D'Amore, 1992; Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2020; D'Amore & Sbaragli, 2020).

Per conoscere i testi completi delle lettere scambiate fra i due formidabili matematici tedeschi, si possono vedere: Noether e Cavaillés (1937) e Cavaillés (1962).

Sorge spontanea la domanda seguente: qual era l'argomento sul quale Cantor sollecitava una rapida risposta da parte di Dedekind? Ce lo dice lo stesso Cantor nella sua lettera del 25 di giugno del 1877:

> Una varietà continua a p dimensioni, con $p>1$, si può mettere in relazione univoca con una varietà di dimensione uno, in modo tale che a un punto dell'una corrisponda uno e un sol punto dell'altra?

[In quell'epoca per "relazione univoca" si intendeva quel che oggi chiamiamo "corrispondenza biunivoca"].

Ci possiamo concentrare sul seguente caso, più semplice ma ugualmente significativo, come spesso si fa in divulgazione (Courant & Robbins, 1941):

> È possibile trovare una corrispondenza biunivoca fra i punti di un quadrato e i punti di un segmento? (Per esempio, di un lato del quadrato stesso?)

Per "quadrato" intendiamo, d'ora in poi, una superficie piana di forma quadrata *aperta,* cioè senza bordo, senza frontiera. D'ora in poi chiameremo "segmento" un segmento aperto, cioè senza estremi.

Si può intuire l'importanza della domanda a partire dal seguente commento dello stesso Cantor:

> La maggior parte di coloro ai quali ho posto questa domanda si sono sorpresi molto del fatto stesso ch'io la ponessi, dato che è evidente che, per la determinazione di un punto su una estensione di p dimensioni, si necessita sempre di p coordinate indipendenti.

Nel seguito della lettera, Cantor confessa a Dedekind che aveva cercato di dimostrare questa impossibilità, dando per scontato che fosse vera, ma solo perché non era soddisfatto della supposta e così diffusa evidenza!

Confessa dunque di aver sempre fatto parte di coloro che non ponevano in dubbio questa impossibilità della corrispondenza biunivoca; … *sempre*, fino a che dimostrò che le cose *non* stanno affatto così …

La dimostrazione trovata da Cantor è di una semplicità geniale; per conoscerla, basta consultare un buon libro di Analisi, per esempio Bourbaki (1970, pp. 47–49).

Noi ci ispiriamo in quanto segue a una celebre volgarizzazione della dimostrazione di Cantor che si trova in Courant e Robbins (1941) relativa all'esempio visto sopra: quadrato/lato.

Poniamo il quadrato su un sistema di assi cartesiano ortogonale monometrico di origine O, in modo tale che due lati consecutivi siano "appoggiati" sugli assi (ovviamente uno dei vertici coincide allora con l'origine). Considerando il lato del quadrato come unità di misura, si ha che ogni punto P interno alla superficie quadrata ha coordinate reali x_p e y_p del tipo $0 < x_p < 1$, $0 < y_p < 1$, dunque, esplicitamente: $x_p = 0,a_1a_2\dots a_n\dots$, $y_p = 0,b_1b_2\dots b_n\dots$ A ogni *coppia ordinata di numeri reali* $(x_p\,;y_p)$ si faccia corrispondere *il numero reale* $x_{p'}$ così definito: $x_{p'} = 0,a_1b_1a_2b_2\dots a_nb_n\dots$, ottenuto preponendo 0 e la virgola, e alternando poi le singole cifre decimali di ciascuna coordinata. Si può facilmente constatare che $0 < x_{p'} < 1$ e come tale $x_{p'}$ è definito in modo univoco a partire da x_p e y_p; e come $x_{p'}$ si possa considerare come coordinata ascissa di un punto P' sull'asse x $[P'(x_{P'}\,;0)]$, pensabile dunque come *il* corrispondente di P nella corrispondenza definita.

Viceversa: si può partire da P' e dalla sua coordinata ascissa e, con un banale metodo inverso di distribuzione delle cifre (quelle di posto dispari a costruire il valore dell'ascissa x_p e quelle di posto pari a costruire il valore dell'ordinata y_p), risalire univocamente a P.

Dunque, questo teorema di Cantor è provato da noi, almeno nel caso in cui la dimensione p della varietà è 2: ai punti interni del quadrato unitario corrispondono in modo biunivoco i punti interni del segmento unitario.
[Si noti che la dimostrazione è basata sulla scrittura formale dei numeri reali; ma, come sappiamo, questa non è univoca perché, per esempio, $2,6\overline{9}$ e 2,7, pur essendo due scritture diverse, rappresentano lo stesso numero. Per rimediare a questo inconveniente, basta vietare una delle due scritture; per esempio vietiamo la scrittura con il 9 periodico].

La nostra ricerca ha motivazioni puramente didattiche e i paragrafi precedenti semplicemente inseriscono la situazione nell'ambito storico.

Abbiamo voluto ricordare quanto precede solo per giustificare il titolo che abbiamo dato alla ricerca: "Lo vedo, ma non lo credo", la celebre frase di Cantor, che rende tanto umana tutta la storia di questa dimostrazione.

Questa frase è emblematica di quel che affermavano anche gli studenti da noi sottoposti alla ricerca al finale del loro iter nella scuola secondaria superiore (in Italia e Svizzera: fra 17 e 19 anni), posti di fronte alla dimostrazione data da Courant e Robbins, e illustrata da noi. Argomenti di base necessari per la dimostrazione:

- assi cartesiani ortogonali monometrici
- coppia ordinata $(x_p\,;y_p)$ di numeri reali come coordinate di un punto P
- numeri reali x_p
- scrittura formale $0 < x_p < 1$.

Succede un fatto curioso e interessante:

- anche se lo studente dimostra di conoscere piuttosto bene questi argomenti di base, NON capisce la dimostrazione (nella misura dell'85–90%) che si basa su questi elementi, su queste conoscenze.

Questa rilevazione inattesa apre un nuovo filone di ricerca. Quasi tutti noi docenti siamo convinti che se un apprendente conosce gli argomenti considerati di base, A_1, A_2, …, A_n relativi a un tema nuovo T, allora ciò garantisce che si possa procedere con l’introduzione di T. Ma non sempre le cose vanno così lisce. Quante volte ci è successo di restare stupiti di questo fatto. Come stabilire esattamente quali argomenti di base A_i siano necessari per apprendere T?

Ora, dopo questa esperienza, ci sembra ragionevole pensare che non si tratta solo di una “somma” di conoscenze, ma di qualcosa di più, vorremmo chiamarla: articolazione delle conoscenze. E inoltre sono necessarie competenze trasversali, per esempio spesso di tipo logico, che un docente può dare per scontate … Dimostrazioni per assurdo, deduzioni parziali, riconoscere ipotesi e tesi, …

Serve un matematico per capire tutto ciò, non basta una conoscenza di base acquisita solo con lo studio, servono pratica ed esperienza nel trattare con oggetti della matematica, molti, mescolati fra loro, allo stesso tempo.

4. La dimostrazione *nyaya* in aula

Per parlare di questa ricerca è necessaria una breve premessa teorica di storia della Logica e più precisamente di una logica che noi occidentali consideriamo non standard, non classica. Ma che, a sorpresa, si è rivelata in più classi di scuole italiane, in modo spontaneo. Il che ci ha molto fatto riflettere.

La scuola indù *nyaya* (⁻II sec. – VII sec.) affermava l’egemonia di quattro “mezzi di conoscenza” (*pramana*):

- la testimonianza
- l’analogia
- la percezione
- l’inferenza

che vengono brevemente esaminati qui di seguito.

La testimonianza (*sabda*) comprende tutto ciò che di scritto o di tramandato oralmente è degno di fede. Ne fanno parte le preghiere, la rivelazione di Dio, la storia tramandata, i poemi sacri.

L’analogia (*upamana*; c’è chi la traduce in italiano “comparazione” e chi “equivalenza”) è la forma di ragionamento che porta a una definizione dell’oggetto dovuta alla somiglianza con altri. Si noti che l’analogia *nyaya* classifica gli oggetti in categorie o classi di analoghi, distinguendo due classi tra loro in base al fatto che non contengono termini analoghi. Ora, dato che l’analogia tra oggetti esistenti è dovuta a considerazioni relative all’oggetto (e quindi non astratte, ma classificatorie e sperimentali), questa forma di conoscenza non può non richiamare alla nostra attenzione alcune delle concezioni attuali, anche in matematica. Si pensi in geometria alle definizioni per genere prossimo e differenza specifica o le definizioni cosiddette analitiche che individuano classi per mezzo di un passaggio al quoziente, dunque in base a una relazione di equivalenza.

La percezione (*pratyaska*) è la relazione tra l'oggetto visibile (ciò che cade sotto gli occhi) o comunque sensibile (relazione prodotta dal contatto di un organo di senso con l'oggetto) e la nostra immagine di esso. Tralasciamo considerazioni relative ai sei sensi che i filosofi *nyaya* riconoscevano all'uomo, per ricordare l'importanza che attribuivano al sesto senso, l'intelletto (*manas*), a causa della funzione ordinatrice e mediatrice che questo "organo" ha, rispetto agli altri cinque.

Ricordiamo che i concetti comunicabili acquistano una loro realtà, nella filosofia *nyaya*, in contrapposizione alla pura immagine mentale che attribuivano loro i buddisti.

E arriviamo all'inferenza (*anumana*) che rappresenta, nella scuola *nyaya*, il momento sublime.

Non è molto conosciuto il *sillogismo nyaya* (lo chiamiamo così per via della sua forma simile, per certi versi, almeno all'apparenza, a quello aristotelico). La *nyaya* distingueva nel suo sillogismo cinque elementi assertivi (e non tre, come nel sillogismo aristotelico):

- l'asserzione (*pratijna*) (non dimostrata; enunciazione di quel che si vuole dimostrare, quel che sarebbe, nelle nostre logiche classiche, la tesi)
- la ragione (*hetu*)
- la proposizione generale o enunciato (*udaharana*), seguita da un esempio (di solito un esempio concreto, tratto da esperienze di vita reale)
- l'applicazione (*upanaya*), detta anche seconda asserzione
- la conclusione (*nigamana*).

Il seguente esempio è un classico *nyaya*:

1. l'oggetto A si muove (asserzione, tesi)
2. perché gli è stata applicata una forza (ragione)
3. ogni volta che si applica una forza a un oggetto, esso si muove (proposizione generale);
   per esempio: se si attaccano buoi a un carro, esso si muove (esempio)
4. all'oggetto A è stata applicata una forza (applicazione)
   dunque:
5. l'oggetto A si muove (conclusione).

È abbastanza facile mettere in forma simbolica moderna questo ragionamento, ma non lo facciamo, rinviando gli interessati a D'Amore (2005).

La critica buddista classica rifiuta i momenti primo e secondo, dato che essi non fanno parte del ragionamento vero e proprio, ma sono inglobabili in una tesi. Diciamo ciò per evidenziare che questa apparentemente inutile perdita di tempo si fa spesso nel ragionare comune, per esempio nell'azione didattica: si mette cioè in vista fin dall'inizio quanto si vuol arrivare a dimostrare; diversamente non si organizzerebbe proprio *quel* ragionamento. Su questo punto dovremo tornare più avanti.

A torto, invece, i buddisti rifiutavano il quinto momento, nel quale si compie una sorta di *modus ponens* allargato al calcolo dei predicati, un'operazione logicamente corretta ed essenziale al funzionamento di quel tipo di sillogismo.

L'analisi logica della lingua, in relazione alla stretta connessione attribuita alla dicotomia linguaggio-pensato, porta la *nyaya* a definire un'esatta critica del linguaggio che rasenta sistemi moderni. Nemici del corretto dedurre o del parlare sono, per i *nyaya*:

- l'ambiguità (*chala*) che si realizza ogni volta che un termine viene usato a sproposito (in sostanza, si tratta di un cattivo uso dell'analogia);
- l'inconclusione (*jati*), discorso circolare senza contenuto;
- gli argomenti assurdi (*nigrahastama*) cui ricorre chi non ha logica; il destino di costui è d'essere dialetticamente sconfitto da chi opera con logica e con argomentazioni razionali.

I filosofi *nyaya* studiarono poi i casi in cui i loro sillogismi portavano a sofismi; ecco i casi principali di questa deleteria riduzione:

- inesatta rispondenza tra le varie parti costituenti il sillogismo, per cui non c'è relazione tra i termini;
- assurdo intrinseco che appare in un termine che afferma il contrario di ciò che vorrebbe asserire;
- assurdo esplicito dovuto alla contrapposizione di due termini del sillogismo che si escludono a vicenda;
- la mancanza di una dimostrazione o verifica di uno dei termini su cui poggia il ragionamento;
- la falsità del termine maggiore o l'inesistenza dell'oggetto in questione o l'attribuzione di false proprietà a esso. [Su questo punto, si ricordi la posizione di Aristotele nei confronti dell'insieme vuoto e il superamento della questione da parte di Gergonne (D'Amore, 2001b)].

Da qui si vede bene come la *nyaya* sia diversa dalla logica aristotelica dato che si basa essenzialmente sulla verifica empirica, sul contatto con il mondo esterno, intendendo per mondo non solo l'insieme delle cose e dei fatti ma pure dei pensati, come fossero entità reali ("reali" non semplicemente "esistenti", per non credere che si possa fare un paragone con il platonismo).

[Il contatto con il mondo esterno non solo non era contemplato, ma del tutto inviso alla filosofia greca trionfante (Socrate – Platone - Aristotele) che, su questo punto, in modo più o meno esplicito, proseguiva nel ripudiare la *doxa* a favore della scelta parmenidea della *aletheia*. Naturalmente, discorso a parte meriterebbero i tentativi dei Sofisti che, però, furono soggiogati dal trionfo di Aristotele e dalle (precedenti) argomentazioni dialogiche di Platone].

Bisogna qui ricordare che la nostra attuale distinzione tra logica degli enunciati e logica dei predicati non rende giustizia allo sviluppo storico effettivo della disciplina; la logica degli enunciati non è così potentemente presente nell'opera di Aristotele come lo è oggi in qualsiasi testo: essa deriva dagli studi dei filosofi Megarici e Stoici e, paradossalmente, si è affermata più tardi, mentre la logica dei predicati è essenziale per capire, da un punto di vista moderno, la sillogistica di Aristotele.

In aula, nelle lezioni di Logica nella scuola secondaria di II grado, si tratta soprattutto la logica degli enunciati e si tenta di applicarla, come esempio, alle dimostrazioni geometriche alle quali non sempre e non del tutto essa è adatta. Per esempio, nelle dimostrazioni occorre spesso quantificare su variabili, cosa che non ha senso nella logica enunciativa.

Un'analisi molto approfondita sui modi di ragionamento e sulle loro modellizzazioni logiche da parte di esperti (matematici, docenti universitari) e da parte di studenti (universitari, ai primi anni) è quella condotta da Durand-Guerrier e Arsac (2003). Gli Autori mostrano, tra l'altro, concezioni diverse dell'uso e della necessità d'uso dei quantificatori nelle dimostrazioni da parte degli esperti e da parte degli studenti.

Arriviamo al punto.

Molti studenti del primo biennio della scuola secondaria di II grado italiana (14-16 anni) che dimostrano teoremi (meglio: che hanno il compito di dimostrare teoremi) lo fanno spontaneamente seguendo inconsapevolmente la forma dimostrativa *nyaya*. Il fatto di aver studiato la logica classica di stile aristotelico non aiuta per nulla o quasi nello sviluppo delle abilità nella dimostrazione.

Questa esperienza di ricerca, determinata dal caso, ma poi condotta con curiosità e rigore, è dettagliatamente narrata in D'Amore (2005); a quel testo rimandiamo chi volesse avere precise notizie su come la cosa si è inaspettatamente rivelata e sui dettagli successivi, relativi alla ricerca.

Qui, più che tutto ciò, interessa il discorso specifico di questo nostro scritto attuale: chi avrebbe mai potuto riconoscere quel che stava succedendo in aula? L'esasperato tentativo di far uso della tesi in partenza, contrariamente a quel che desiderava-auspicava-suggeriva il docente (secondo il quale la tesi deve apparire solo alla fine, come la logica aristotelica vuole), il desiderio di far ricorso, a metà processo, di esempi opportuni (ritenuto non opportuno dal docente che voleva un ragionamento puramente logico e non legato a fatti specifici) e altri aspetti che ora non sottolineiamo, hanno rivelato che i precedenti mesi di sforzo didattico, tutto teso a far apprendere a quegli studenti la logica aristotelica standard, non ha avuto successo applicativo al momento di produrre dimostrazioni. D'altra pare, la maggior parte del tempo è stata dedicata a far apprendere meccanismi di tipo semantico, legati cioè alle cosiddette tavole di verità dei connettivi, il che, sappiamo bene, in realtà non aiuta affatto nelle dimostrazioni e costituisce un apprendimento a parte, spesso inutile o addirittura dannoso (D’Amore, 1991).[3]

Dunque, quegli studenti avevano appreso la semantica del calcolo enunciativo, qualche vaga nozione di calcolo dei predicati del I ordine, ma non avevano idea di come applicare tutto ciò al processo dimostrativo.

In questo tentativo, spontaneamente, passavano, senza ovviamente saperlo, alla *nyaya*; il docente non capiva quel che stava succedendo e lo interpretava come un insuccesso apprenditivo.

Chi, studiando questa ricerca e i suoi risvolti, può davvero capire quel che sta succedendo in quelle aule? Solo chi ha avuto occasione professionalmente di studiare la storia della Logica e, in particolare, di curiosare fra le logiche antiche, per esempio la *nyaya* indiana.

Non certo un esperto di sistemi scolastici e di difficoltà generiche di apprendimento o cose simili.

5. Relazioni per lo più inattese fra area e perimetro

I due concetti geometrici: “perimetro” e “area di una figura piana” hanno molti elementi in comune sul piano scientifico, però molti altri sono semplicemente supposti sul piano delle “misconcezioni”, comuni fra gli studenti (e non solo) di ogni livello scolastico (D’Amore & Sbaragli, 2005). Per esempio, la letteratura ha dimostrato ampiamente che un gran numero di studenti (e non solo) è convinto che esista una relazione di stretta dipendenza fra questi due concetti dal punto di vista relazionale, del tipo seguente.

Siano A e B due poligoni:

- se (perimetro di A > perimetro di B) allora (area di A > area di B)
- idem con <
- idem con = (per cui: due poligoni isoperimetrici sono necessariamente equiestesi)
- e viceversa, scambiando l’ordine “perimetro-area” con “area-perimetro”.

Raramente questo tema si propone didatticamente in forma esplicita (secondo vari docenti da noi intervistati, per una supposta difficoltà).

Ci siamo chiesti se i docenti, di qualsiasi livello scolare, hanno piena coscienza su questo tema o se, per caso, anche nelle concezioni di alcuni di essi esistono problemi di costruzione concettuale. E così abbiamo dedicato attenzione e studi al problema (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2005; Fandiño

[3] Non abbiamo mai conosciuto un giovane studente di scuola secondaria di II grado che avesse davvero inteso il senso dell’implicazione materiale, anche se ne conosceva a memoria la tavola di verità.

Pinilla & D'Amore, 2009).

Cominciamo con il notare che questa questione ha a che vedere con il problema assai più generale delle convinzioni e delle concezioni dei docenti, in relazione alla Matematica. Un ampio quadro teorico su questo tema si può trovare in D'Amore e Fandiño Pinilla (2004).

Gioca inoltre un altro fattore importante, evidenziato da Azhari (1998); lo diciamo in forma succinta:

Se esiste una coppia di relazioni che lega mutualmente due classi di oggetti, K1 e K2, lo studente cerca di applicare la seguente "legge di conservazione": Se un oggetto di K1 subisce una variazione, anche quello della classe K2 in relazione con K1 lo fa (e viceversa).

L'esempio che lega tra loro perimetri e aree di poligoni cade a proposito per quanto concerne questa idea di Azhari; di più, questo è precisamente uno degli esempi che offrono Stavy e Tirosh (2001), esaminando il lavoro di Azhari.

Allora, se mettiamo in relazione i perimetri di due figure piane A e B con le rispettive aree, una forma convincente di evidenziare che la "legge" annunciata poco fa NON è valida, ci sembra quella di dare un esempio per ciascuno dei seguenti casi possibili:

Perimetro	Area	Perimetro	Area	Perimetro	Area
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

La prima casella > > dice: "Trovare due poligoni tali che, passando dal primo al secondo, il perimetro cresca e anche l'area cresca"; e così successivamente, analogamente.

Per evitare difficoltà, si chiede sempre di partire da poligoni semplici, per esempio un rettangolo, quando ciò è possibile, facendo diverse trasformazioni di qualsiasi tipo su questo poligono o su poligoni che derivino da questo.

Riteniamo necessario che i poligoni sui quali conviene lavorare siano i più semplici possibili per evitate complicazioni che derivano dalla gestione della figura stessa.

Tra poco daremo un esempio per ciascuno dei 9 casi indicati, con poligoni estremamente elementari. Questi esempi non furono mostrati inizialmente ai soggetti implicati nella prova, che descriveremo di seguito; ogni soggetto doveva proporre propri esempi ritenuti opportuni, per lo meno all'inizio.

Domande, metodologia di ricerca e ipotesi di risposte sono date con estrema meticolosità in D'Amore e Fandiño Pinilla (2005) e Fandiño Pinilla e D'Amore (2009). In forma molto succinta:

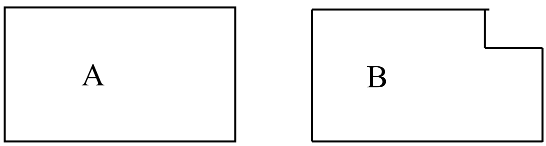
- Soggetti della ricerca:
  - ricercatori

- docenti di tutti i livelli
- futuri docenti in formazione (titolo minimo richiesto: laurea in matematica);

➢ Domande iniziali:
- È vero o non è vero che si possono trovare esempi per tutti i 9 casi?
- È vero o non è vero che sorge spontaneo pensare che, in generale, se aumenta il perimetro di un poligono aumenta anche la sua area?
- È vero o non è vero che si deve fare uno sforzo per convincersi che le cose NON stanno così?

La ricerca è durata molto a lungo soprattutto perché la metodologia è stata molto elaborata; per brevità riportiamo solo alcune note.

Nel momento esploratorio iniziale, perfino alcuni colleghi docenti universitari hanno espresso perplessità sul fatto che si potessero trovare esempi per tutti e 9 i casi. Ma, appena visto il primo esempio significativo da noi proposto (caso 6):

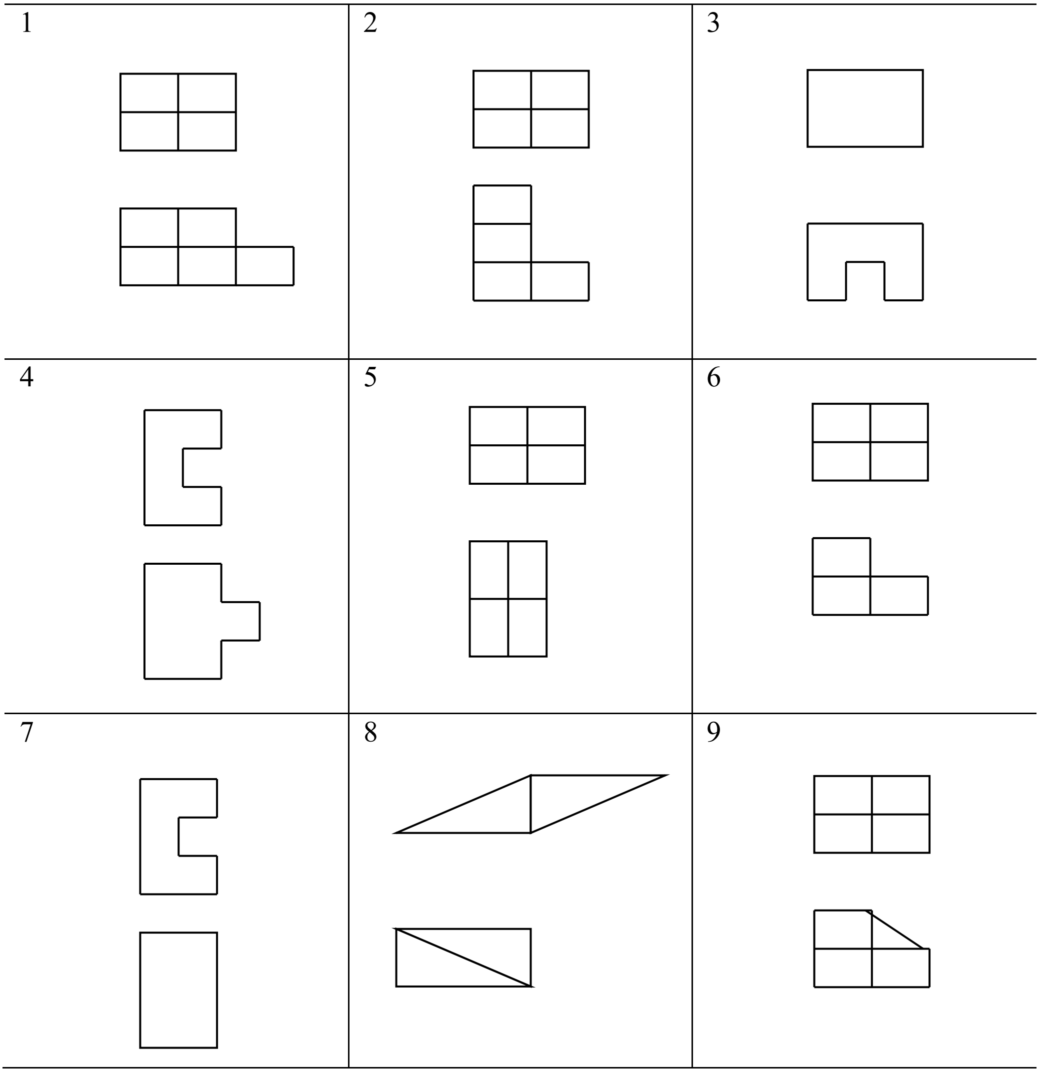


nel quale l’esagono B è stato ottenuto molto visibilmente dal rettangolo A eliminando un piccolo rettangolo in alto a destra, dunque con diminuzione dell’area, lasciando inalterato il perimetro (caso: = <), hanno immediatamente capito di che cosa si trattava, senza più alcun imbarazzo in nessuno dei casi. Molti hanno commentato che, all’inizio, avevano pensato di *dover* usare omotetie, sebbene nella proposta di lavoro non fosse stato affatto usato questo termine.

Alcuni insegnanti di scuola dei primi livelli scolastici hanno contestato il fatto che si potessero trasformare le figure in questo modo; alcuni hanno ammesso che fanno fatica concettuale ad ammettere la figura precedente B nel novero delle “figure della geometria” perché non ha un suo nome proprio; alla nostra proposta di chiamarla “esagono”, molti si sono rifiutati.

Non commentiamo i risultati della ricerca relativa agli allievi, perché passa in secondo piano; d’altra parte, molte delle risposte degli allievi ricalcano le convinzioni dei propri insegnanti, per esempio soprattutto la non accettazione di alcune figure fra le “figure della geometria” o fra le “figure geometriche” perché non sono quelle standard stereotipate incontrate nella pratica didattica o sui libri di testo. Riportiamo di seguito la risoluzione proposta da noi a docenti e allievi di tutti e 9 i casi possibili.

Perimetro	Area	Perimetro	Area	Perimetro	Area
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<



Una volta compreso, grazie ai nostri primi esempi (1-2-3), il senso del problema, i docenti coinvolti nella ricerca hanno saputo trovare gli altri (dal 4 al 9) con maggiore o minore destrezza e rapidità; le maggiori difficoltà si sono avute nei casi 4, 5 e 6.

Abbiamo poi eseguito prove meno stringenti sul piano formale di ricerca, chiedendo a vari altri docenti universitari non matematici di trovare esempi, con risultati per lo più nulli.

Come sempre, concludiamo con le solite considerazioni.

Per quanto la tematica trattata fosse questa volta di livello minimo dal punto di vista dei contenuti matematici, i risultati mostrano che l’analisi di essi non può che essere fatta da un matematico sia perché si richiede il completo dominio del tema in questione, sia per la duttilità propria del matematico professionista nel trattare la coerenza fra domanda posta e risultato ottenuto.

Può essere curioso e interessante chiamare in causa qui un problema che possiamo considerare antesignano di questo e che risale addirittura a Galileo Galilei. Nel capolavoro *Dialogo intorno a due nuove scienze*, *attenenti alla meccanica e i movimenti locali*, nella prima giornata del dialogo (Galilei, 1638) si trova enunciata la seguente affermazione di Sagredo, uno dei tre interlocutori protagonisti del dialogo:

> (…) ignorando che può essere un recinto eguale a un altro, e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello: il che accade non solamente tra le superfici irregolari, ma [anche] tra le regolari, delle quali quelle di più lati son sempre più capaci di quelle di manco lati, sì che in ultimo il cerchio, come poligono di lati infiniti, è capacissimo sopra tutti gli altri poligoni di ugual circuito; di che mi ricordo averne con gusto particolare veduta la dimostrazione studiando la Sfera del Sacrobosco con un dottissimo commentario sopra. (Galilei, 1638, p. 629)

Galilei si riferisce all’opera *De sphaera* (ca. 1230) di John of Holywood (1195 ca. – 1256), matematico e cosmografo inglese, noto con lo pseudonimo di Sacrobosco; si tratta di un testo di astronomia popolare, un antesignano della divulgazione scientifica di grande pregio. Il Sacrobosco fu traduttore di ottimo livello di opere matematiche antiche e strenuo difensore del valore della matematica araba che la Chiesa ha più volte tentato di affossare.

Il fisico-letterato Galilei ci offre, in un italiano mirabile già moderno, due interessanti riflessioni matematiche.

- Nella prima afferma che non vi sono relazioni necessarie tra area e perimetro. Possiamo forzare un po’ la mano a Galilei e proporre un “problema delle piazze del paese” che riafferma in modo più esplicito e problematico la sua frase: “Un paese ha due piazze A e B; il perimetro della piazza A è maggiore del perimetro della piazza B; quale delle due piazze ha area maggiore?”.

Ovviamente una risposta non c’è, ma molti interpellati (e in stragrande maggioranza) rispondono “A”, per una falsa relazione che ritengono necessaria: maggiore perimetro $\rightarrow$ maggiore area. (Richiamiamo Azhari, 1998). Galilei è decisamente sarcastico nei confronti di coloro, colti e ignoranti, scienziati o artisti, che tendono a rispondere A. La reazione di Galilei è significativa ma i risultati delle nostre ricerche in Didattica della Matematica mostrano che ben poco è cambiato dopo quasi cinque secoli.

Moltissimi degli specifici intervistati, tutti docenti di Matematica, decisamente la stragrande maggioranza, 40 su 43, anche laureati, anche insegnanti di scuola secondaria di II grado, affermano dapprincipio spontaneamente che ha area maggiore la piazza che ha perimetro maggiore, salvo poi:

- correggersi, affermando che “non è detto”, ancor prima di effettuare tutte le prove previste nell’intervista (e qui si nota un maggior addensamento tra gli insegnanti di Matematica della scuola secondaria di II grado)

oppure

- accettare che la propria risposta fosse criticabile e scorretta, ma solo dopo aver eseguito le prove (e qui si nota un maggior addensamento tra gli insegnanti dei primi livelli scolastici).

Dunque, il *cambio di convinzione* è palese, a volte forte, e in parecchi casi richiede prove e riflessione non banali.

- Nella seconda riflessione/secondo problema sempre della prima giornata, Galilei afferma che, tra tutte le figure piane di ugual lunghezza del contorno, il cerchio è quello di area massima; in altri termini si tratta di stabilire qual è tra tutte le figure piane isoperimetriche quella di area massima.

L’analisi di questo argomento permette di fare esempi a scopo didattico interessanti, per esempio facendo riferimento al mitico famoso incontro fra Didone e Iarba, alla base della mitica fondazione di Cartagine ($^{-}$814) (D’Amore & Sbaragli, 2017).

Il terzo problema sembra distante dai due precedenti, ma non lo è per nulla; Galilei lo esprime in termini di due tele rettangolari per confezionare sacchi destinati a contenere merci; se tali tele vengono arrotolate a formare sacchi lungo le due diverse dimensioni, i due sacchi così ottenuti conterranno la stessa quantità di patate o quantità diverse? Noi lo esporremo in termini più moderni; si chiede dunque se una persona di cultura possa rispondere correttamente alla seguente domanda: supponiamo di arrotolare due fogli di carta di formato A4 (dunque identici), uno lungo un lato e l’altro lungo l’altro lato, a formare due cilindri (che hanno evidentemente la stessa area laterale); tali due cilindri avranno uguale volume o volumi diversi?

La prima risposta spontanea data da tutti gli studenti, da molti docenti e da tutti gli intervistati di cultura non specificamente matematica è che sì, i due cilindri hanno lo stesso volume. Solo calcoli (banali) o considerazioni opportune mostrano che le cose non stanno affatto così.

L’intuizione spesso sa essere subdola …

6. Disegna un rettangolo …

Fin dalle prime ricerche in Didattica della Matematica, si è rivelato di un certo interesse occuparsi anche di studenti molto giovani, di scuola primaria. La Matematica trattata in quel segmento scolare è certamente di livello scientifico non elevato, ma è la base di tutte le costruzioni cognitive e intellettuali successive. Si dà come accertato ed evidente che, nella storia individuale culturale di un individuo, difficilmente un disamore o una incomprensione nei riguardi della Matematica venga superata negli anni successivi; si constata, e sono soprattutto sociologi, psicologi e pedagogisti a farlo, che il disamore, la disaffezione, lo scarso interesse, i risultati negativi proseguono, fino a sfociare spesso in avversione, spesso nella scuola secondaria. Costoro, di fronte a Matematica di livello più elevato, non saranno più disponibili all’impegno e all’apprendimento nella e della Matematica.

Perfino Guy Brousseau, il geniale pioniere della Didattica della Matematica, ha dedicato la stragrande maggioranza dei suoi studi e delle sue ricerche alla scuola primaria.

Come abbiamo detto in precedenza, all’inizio della sua storia, la Didattica della Matematica ha dovuto fare i conti con l’esistente, giungendo a includere quel che serve alla Didattica traendolo dalle altre discipline, per esempio Psicologia e Pedagogia.

Per esempio, all’inizio degli anni ’80 del XX sec., nelle ricerche psicologico-pedagogiche di Ackermann-Valladolao relative a un generico tema “risoluzione dei problemi” (di Matematica, nella scuola primaria), si dà grande importanza non solo alle consegne di tipo strettamente matematico, ma anche a quelle più generali legate ad attività al contorno e relative al modo di comportarsi, alle situazioni ammesse, come e dove eseguire eventuali disegni, ... (Ackermann-Valladolao et al., 1983). Questo, che potremmo chiamare *contesto esterno*, ha un ruolo importante nella scelta del modello adeguato da parte dello studente. Sono considerazioni non certo di tipo matematico, ma di carattere psicologico e comportamentale che potrebbero sfuggire all’occhio di un matematico o di un ricercatore matematico o di un docente di Matematica. E tuttavia bisogna riconoscere che hanno un certo peso nel processo concreto in aula e potrebbero influire negativamente nella determinazione di attività e di conseguenza dell’apprendimento, condizionando profondamente la propensione all’impegno e dunque all’apprendimento. La macchina umana pensante è molto complessa.

Vari didatti della Matematica dei primi anni della ricerca, cercando ispirazione per la loro azione, studiarono questo tipo di ricerche, trovando interessanti spiegazioni di quel che accade nelle aule nelle ore di Matematica, a tutti i livelli scolastici (D’Amore, 1999).

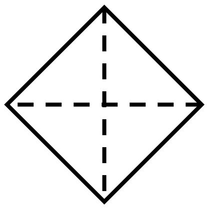
Un bell’esempio dell’analisi e dell’applicazione della tesi di Ackermann-Valladolao si ha in alcuni lavori di Elisa Gallo e di suoi collaboratori a Torino (Gallo, Amoretti, & Testa, 1989; Gallo, Testa, & Amoretti, 1989; Gallo & Testa, 1991; Gallo, 1992a, b; Gallo, Ferrari, & Speranza, 1995).

Questo tipo di ricerche sul comportamento degli studenti di fronte a compiti di Matematica a prima vista semplicissimi è stato condotto a più riprese anche da noi e in diverse direzioni. Per cui, pur riconoscendo la priorità degli studi citati, noi riportiamo la specificità della nostra esperienza.

Ripetiamo, per il lettore matematico: il compito matematico sottoposto agli studenti è di una semplicità teorica e tecnica sconcertante e proprio per questo attira la nostra attenzione il netto insuccesso dovuto all'enorme quantità di risposte sbagliate, in tutta la scuola secondaria di II grado, da parte di moltissimi insegnanti di scuola primaria, nei corsi universitari nei quali la Matematica è presente come disciplina di servizio, non come disciplina principale.

In D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani e Sbaragli (2019) si presenta uno studio basato su analisi e intuizioni contenute in Gallo (1985).

Durante una sperimentazione in una classe IV di scuola primaria in Italia si è presentata la seguente situazione. Dopo aver mostrato dei fogli quadrati di carta nei quali si erano evidenziate le pieghe in corrispondenza delle diagonali, il ricercatore ha disposto il proprio modello di quadrato nella seguente "inaspettata" posizione rispetto a quella "classica" scelta dai bambini per parlare di quadrato.



A questa provocazione i bambini hanno obiettato: "Quello che hai in mano tu non è mica un quadrato, è un rombo. Quello che abbiamo in mano noi è un quadrato". (I bambini tenevano il quadrato disposto nel modo stereotipato classico, con due lati paralleli al pavimento).

Il ricercatore ha allora sollecitato la discussione domandando loro: "Perché quello che ho in mano io è un rombo e il vostro è un quadrato?".

Bambini: "Perché la maestra ci ha detto che il rombo ha le diagonali orizzontali e verticali, mentre il quadrato ha le diagonali oblique".

Nella logica di ciò che era stato loro insegnato e che essi avevano appreso, i bambini avevano ragione: la risposta risultava coerente rispetto all'insegnamento che avevano ricevuto. La rappresentazione e l'indicazione verbale che l'insegnante aveva fornito ai propri allievi, in buona fede, allo scopo di aiutarli, risultava in realtà un ostacolo all'apprendimento, dato che fissava l'attenzione su una particolare posizione assunta dall'oggetto e non sulle proprietà intrinseche dell'oggetto in sé. Tale posizione risultava intuitiva per gli allievi, essendo percettivamente immediata, ma celava le caratteristiche matematiche del concetto.

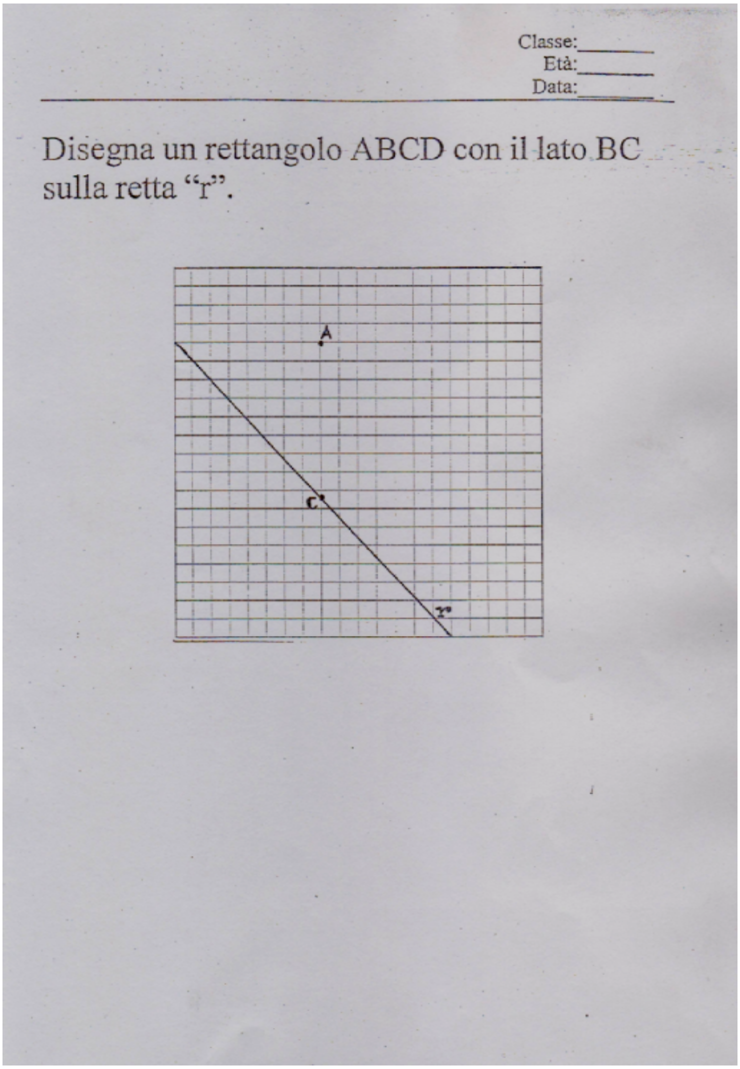
Oggetti della Matematica, come lati o diagonali, vengono rappresentati secondo certe modalità che nulla hanno anche fare con la Matematica, ma con la realtà empirica; una diagonale, dunque una retta, oggetto geometrico astratto, a rigore non si può pensare come parallela a un pavimento o a una parete, c’è un contrasto descrittivo legato alla realtà empirica che cozza con la idealità dell’oggetto geometrico. I riferimenti relazionali ideali astratti (parallelo, perpendicolare, orizzontale, verticale eccetera) hanno senso solo se riferiti a suoi analoghi oggetti ideali e non a fattori esterni concreti, della realtà empirica.

Ma forse pretendere questo nel corso di un insegnamento di scuola primaria è pretendere troppo; però così nascono storture notevoli. E poi, torniamo a segnalare, gli stessi docenti di primaria non si rendono conto di ciò, colpevolizzando gli innocenti bambini; i ragazzi di scuola secondaria continueranno a ragionare così, lo stesso all’università. Gli stessi insegnanti di scuola primaria, nella maggioranza dei casi, ritengono di aver agito in modo matematicamente corretto.

Le misconcezioni rilevate in questo caso sembrano dipendere da due diverse cause: la ripetitività della rappresentazione proposta dall’insegnante (che consiste nel quadrato obbligatoriamente disegnato con i lati orizzontali e verticali rispetto al punto di vista del lettore e che viene proposto in generale in modo quasi esclusivo) e soprattutto l’*istituzionalizzazione* verbale di tale scelta.

Dicevamo che si potrebbe guardare a tutto ciò con benevolenza adulta, sorridendo, pensando che si tratta di bambini di 9-10 anni; ma il problema che noi abbiamo rilevato è che la stessa situazione identica si presenta nella scuola secondaria di II grado e all’università, con le stesse identiche repliche da parte degli studenti oramai adulti. E la cosa diventa interessante anche per un matematico e non più e non solo per uno psicologo o per un pedagogista … Specie nel caso dell’esperienza che segue che abbiamo ripetuto in Italia e all’estero in diverse occasioni, sia con studenti delle scuole secondarie di II grado (o analoghe), in università e in corsi per la formazione di docenti di scuola primaria.

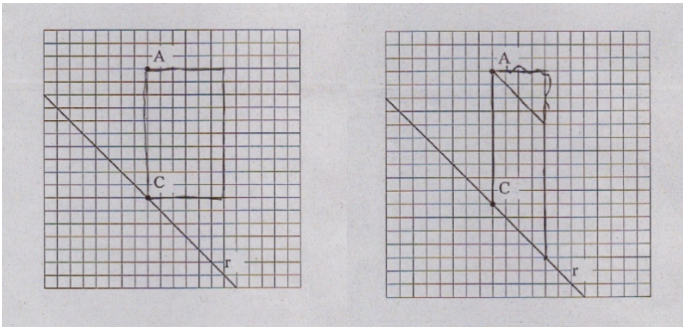
A ciascun soggetto sottoposto alla prova si consegnava un foglio A4 come il seguente.

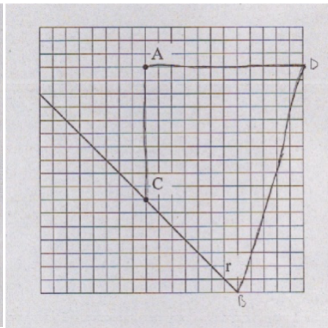


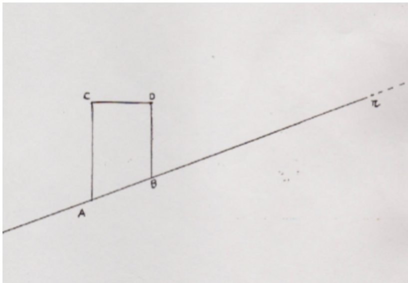
Può sembrare sorprendente che la realizzazione del disegno del rettangolo richiesto presenta una difficoltà estrema, ed è per questo che proponiamo sempre ai colleghi docenti increduli di provare nelle loro classi. I casi di mancata risoluzione corretta del test sono in una percentuale enorme.

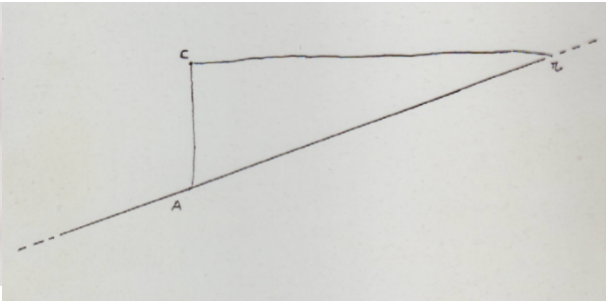
Non è solo un problema di immagine stereotipata del rettangolo (come nel caso precedente di quadrato-rombo). Si tratta proprio della quasi impossibilità di visualizzare la vera essenza del rettangolo, il concetto figurale di rettangolo (Fischbein, 1963; Fischbein & Vergnaud, 1992). [Efraim Fischbein è un altro psicologo ai cui studi noi didatti della Matematica matematici abbiamo attinto molto].

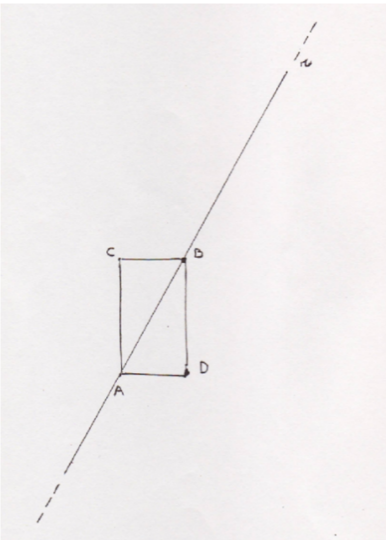
Proponiamo di seguito alcuni dei risultati ottenuti, a mo' di esempio. Si noti che, negli anni, abbiamo provato in varie e diverse modalità: carta a quadretti, carta bianca, maggior o minor inclinazione della retta *r* in un verso o in un altro. [Abbiamo reso anonime le prove, cancellando i nomi degli autori coinvolti nella prova].









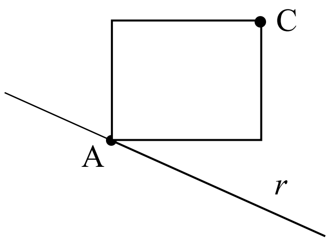


Saper visualizzare un testo, cioè saper passare da un testo contenente una consegna scritta a una rappresentazione grafica con esso coerente non è una capacità spontanea, va educata gradualmente, cominciando il più presto possibile e con tutti i mezzi possibili. E non solo usando software geometrico, ma anche matita e strumenti concreti da disegno. [Varie prove analoghe anche relative a disegni bidimensionali che rappresentano prospettive impossibili di inesistenti oggetti geometrici si trovano in D'Amore e Duval (2019)].

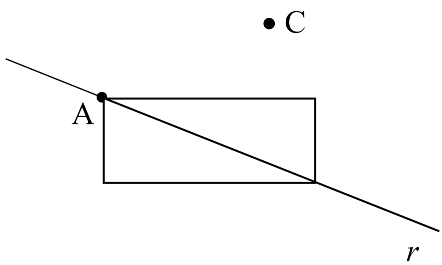
C'è poi anche un problema relativo alla comprensione dei testi scritti nel caso della Matematica, da parte degli studenti. Più precisamente, il testo della consegna citato poco sopra dovrebbe essere visto come costituito dalle seguenti componenti elementari:

- disegna il (un) rettangolo
- chiamalo ABCD
- il lato AB deve stare sulla retta *r*;
  questa consegna non sempre è ben capita e qualche volta è ulteriormente spezzata in due componenti:
  - un lato deve stare sulla retta *r*
  - quel lato si deve chiamare AB.

Di fronte alle richieste multiple, qualche comportamento erroneo risulta spiegato se si accetta che il soggetto esegua solo il *primo* compito, ignorando gli altri. Ecco allora che si spiega perché emerge il modello standard:



che abbiamo riscontrato assai diffuso, insieme al seguente:



e altri.

Ci faceva piacere far conoscere ai nostri lettori matematici anche ricerche di questo genere che coinvolgono temi matematici di basso profilo scientifico, per far capire che cosa significa che noi didatti della Matematica matematici abbiamo dovuto fare i conti, confrontarci, con discipline come Pedagogia, Didattica generale, Psicologia e altre, che per prime avevano iniziato a esplorare questi atteggiamenti da parte degli studenti.

È vero che il livello matematico qui coinvolto è minimo, ma proprio per questo pare assurdo che la percentuale di studenti (e non solo) che non sanno come rispondere a queste domande è talmente alta che dobbiamo prenderla in esame, non possiamo far finta di nulla. E solo un matematico esperto in Didattica capisce il senso profondo, non solo tecnico, di questa situazione che, per molti motivi, risulta essere imbarazzante.

7. Il contributo di alcuni libri di testo a creare confusione

Il Lettore ricorderà che in 1. abbiamo fatto riferimento a un (famoso e diffuso) libro di testo di Matematica per la scuola secondaria di II grado nel quale si dà una definizione di insieme infinito in maniera alquanto … bizzarra, usando come *definiens* il *definiendum*.

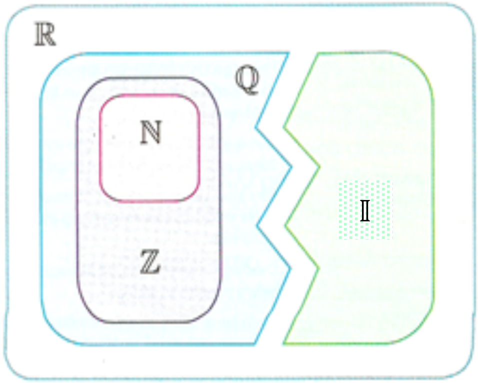
Non è l'unico caso di libro di testo contenente brani discutibili sul piano formale, ma solo un matematico se ne accorge; lo affermiamo perché abbiamo sottoposto alcune pagine, formule, grafici, disegni, definizioni a colleghi docenti di scuola secondaria per vedere se anch'essi ravvisassero le stesse storpiature, errori, incertezze, incongruenze che rivelavamo noi. Ma capita che pochi intervistati se ne rendano conto. Eppure la maggior parte sono laureati in Matematica.

Se dunque si decide di compiere analisi critiche sui libri di testo, non possiamo chiederlo né a docenti attivi (che sono poi gli stessi che tali libri scrivono o per lo meno che li adottano), né tantomeno a colleghi universitari che non siano matematici. Per ovvii motivi. Ma non è possibile che i colleghi matematici docenti universitari non si rendano conto dell'estremo interesse che c'è in tutto ciò. Per ottenere un perché motivato e significativo, è necessario impostare una vera e propria ricerca.

Ecco alcuni altri esempi, fra i tantissimi disponibili, scelti del tutto a caso. Come sempre, non citeremo le fonti.

Testo universitario di Matematica, ma per corsi di laurea diversi da quello in Matematica

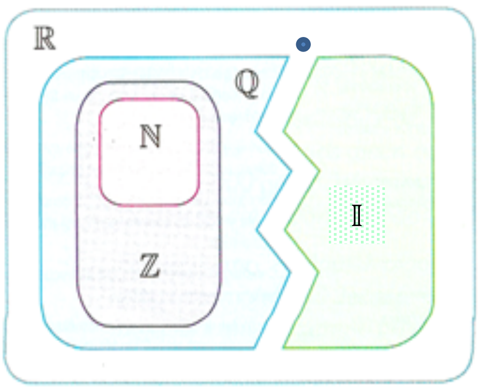
Al termine di una lunga spiegazione su che cosa debba intendersi con i simboli $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$ (irrazionali) ed $\mathbb{R}$, l'autore afferma che $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ e rappresenta quanto affermato per iscritto con il seguente schema grafico.



$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Noi abbiamo chiesto il parere sulla correttezza di questo grafico e sulla sua aderenza a quanto rappresentato simbolicamente e formalmente, ottenendo solo assensi e qualche incertezza.

Abbiamo allora indicato con un punto un oggetto dell'insieme $\mathbb{R}$ che non fosse, nello schema (si veda il successivo schema), né in $\mathbb{Q}$ né in $\mathbb{I}$, chiedendo che cosa rappresentasse.



Le risposte sono state le più varie: un numero reale (né razionale, né irrazionale?), un numero imaginario (nell'insieme $\mathbb{R}$?) e varie altre. La forza di affermare che, di fronte a questa nostra richiesta, potesse emergere che il grafico è sbagliato o che non funziona, che non rappresenta quel che si vorrebbe rappresentasse, non appare (se non dopo attente considerazioni).

Un matematico se ne rende conto subito, un docente di Matematica non matematico no. Per lo meno, non sempre e non subito.

Spesso, poi, nonostante la nostra spiegazione, la reazione era di incredulità, come se si stesse cavillando o scherzando; molti intervistati non capivano nemmeno perché noi ritenessimo sbagliato il grafico-schema, neppure dopo la nostra spiegazione (Becerra Galindo, 2020a, b).

Scuola secondaria di I grado: le frazioni

Crediamo che nessun matematico professionista (a meno che non abbia aiutato i propri figli nel disbrigo di pratiche matematiche in primaria e in secondaria di I grado) sappia che è enormemente diffusa, nelle scuole italiane, la dizione: frazione propria, impropria e apparente. Si tratta di una partizione dell’insieme delle frazioni F (assolute) intese come numeri razionali assoluti (dunque privi di segni), cioè $\frac{n}{d}$ con $n \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Siccome siamo certi che la maggior parte dei matematici professionisti non sappia di che cosa si tratta, diamo un rapido cenno.

Consideriamo l’insieme F delle frazioni assolute; esso può essere suddiviso in due insiemi FP (*frazioni proprie*) e FI (*frazioni improprie*) tali che:

- FP $\subset$ F sono le frazioni del tipo $\frac{n}{d}$ con $n < d$;
- FI $\subset$ F sono le frazioni del tipo $\frac{n}{d}$ con $n \geq d$.

Ovviamente: FP $\neq \emptyset$, FI $\neq \emptyset$, FP$\cup$FI = F, FP$\cap$FI = $\emptyset$. Come sottoinsieme delle frazioni improprie FI, si può definire l’insieme FA (*frazioni apparenti*) (FA $\neq \emptyset$) tali che:

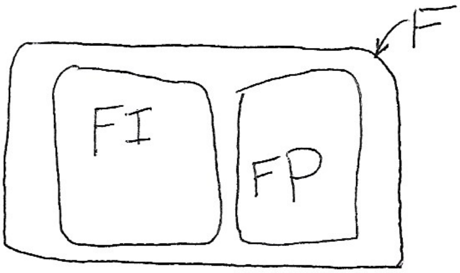
- FA $\subset$ FI sono le frazioni del tipo $\frac{n}{d}$ quando *n* è un multiplo di *d*, cioè si può trovare un numero naturale *k* tale che $n = kd$ (per $k \in \mathbb{N}$).

Siccome però moltissimi autori e docenti considerano che il contrario di $n < d$ non sia $n \geq d$ (come dovrebbe essere) ma $n > d$, allora nasce tutto un pasticcio e, spesso, la tripartizione proposta in aula e sui libri non funziona.

Per esempio, se $n = 0$, e dunque si può pensare *n* come multiplo di *d* (per $k = 0$), ne risulta la frazione $\frac{n}{d} = 0$, che nessuno sa più dove collocare …

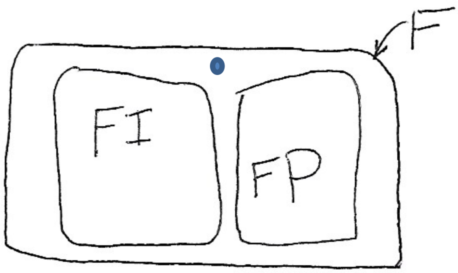
Le situazioni di dubbia definizione che si presentano sono talmente tante, che noi ci fermiamo qui.

Ecco come un docente di scuola secondaria di primo grado ha rappresentano graficamente la ripartizione dell’insieme F delle frazioni in proprie e improprie.



Sta bene il fatto che $FI \subset F$, che $FP \subset F$, che $FI \cap FP = \emptyset$; ma, come nel caso del grafico precedente relativo ai numeri razionali e irrazionali, non risulta, come dovrebbe essere, che $FI \cup FP$ sia F, dato che esiste una specie di cornice il cui senso logico-semiotico è sfuggente.

Analogamente al caso precedente, abbiamo proposto al docente di dire che tipo di frazione fosse quella rappresentata dal punto che noi abbiamo disegnato sul grafico.



Siamo rimasti sconcertati quando il docente ci ha detto che si tratta di una frazione apparente, dato che non è né propria né impropria.

Evitiamo ogni commento e terminiamo questo tema confessando che suggeriamo sempre ai docenti di lasciar perdere questa inutile trattazione sulla tipologia delle frazioni, dato che matematicamente non è né utile né rilevante, e nulla aggiunge alla loro comprensione. Anzi, sembra produrre solo problemi.

Sempre a proposito delle frazioni, può essere interessante sapere che un'analisi della produzione matematica di Leonardo da Vinci mostra che il grande genio toscano del Rinascimento si trovava a mal partito con questo tema, arrivando a commettere errori davvero inaspettati (Bagni & D'Amore, 2006). Ma c'è una considerazione speciale sul rovescio del foglio 10 del Codice L che attira la nostra attenzione critica.

Codice L, pagina 10 v

Leonardo deve calcolare $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$; sa che, secondo le regole, si dovrebbe eseguire $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}$ e ottenere $\frac{8}{9}$ e dunque lo esegue; ma poi critica e rifiuta il risultato: "Questo è falso imperrocché 8/9 è più di 2/3". Il rifiuto è di facile comprensione: se si divide A per B e si ottiene C, questo C deve essere minore di A, altrimenti che razza di *divisione* è? Cioè: che razza di partizione è?

Questo modello ingenuo della divisione funziona fra numeri naturali, ma certamente non fra razionali, pertanto non si adatta alle frazioni …

A questo punto Leonardo inventa un altro algoritmo per la divisione che, ovviamente, non funziona.

Può essere interessante sapere che questo tipo di misconcezione (e cioè che sempre, in una divisione $a:b$ il quoziente *c deve essere minore di a*, sempre, indipendentemente dal campo numerico nel quale si opera), è molto diffusa, e non solo fra gli studenti dei bassi livelli di scolarità. Ma anche presso studenti del primo anno di un corso universitario (corsi di Matematica, ma non del corso di laurea in Matematica).

Va anche detto che nessuno degli studenti da noi intervistati e quasi nessuno dei molti docenti di Matematica da noi intervistati ha saputo dare una spiegazione logica sensata o formale del fatto che, per eseguire la divisione fra due frazioni $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ $(b\neq 0 \text{ e } d\neq 0)$, si può effettuare la moltiplicazione $\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ $(c\neq 0)$. Per tutti è una "regola", "si fa così", "*basta* fare così", ma nessuno sa spiegare un perché. Il che si traduce, dal punto di vista didattico, in una trattazione inaccettabile che prevede che in Matematica ci sono questioni che non si spiegano, che si devono eseguire in un certo modo, ma nessuno sa il perché.

[Per una trattazione matematica approfondita del tema "frazioni", ma destinata alla didattica, frutto di parecchi anni di ricerca matematica e didattica empirica, si veda: Fandiño Pinilla, 2021].

[Segnaliamo anche il fatto che in Fischbein (1985) si evidenziano già parecchie di queste questioni, aventi a che fare con le operazioni aritmetiche elementari in genere, ma con la divisione in particolare. Come matematici, consideriamo notevole il fatto che il volume nel quale appare l'articolo di Fischbein, del lontano 1985, è stato pubblicato con contributo dell'Unione Matematica Italiana, grande esempio di lungimiranza (Chini Artusi, 1985)].

Atteggiamenti di questo genere, che possono irritare o divertire un matematico professionista, sono molto molto presenti nella pratica didattica, non solo pre-universitaria, per esempio nella (mancata) spiegazione di come si possa trasformare un numero periodico in una frazione.

Quasi tutti i docenti interessati (a parte gli universitari) hanno contestato la nostra affermazione secondo la quale $7{,}4\overline{9} = 7{,}5$ (e, ancor più, che $0{,}\overline{9} = 1$).

Ma il lettore, collega docente universitario matematico professionista, ha già capito il senso della cosa e non procediamo oltre.

Noi però poniamo con insistenza l'usuale domanda. Per intervenire in modo efficace su tutto ciò, per fare ricerca seria, anche empirica, per decidere come organizzare la formazione matematica dei futuri docenti di Matematica, non è evidente che serve la competenza, la cultura, la quotidianità con la Matematica di un matematico professionista? Davvero si pensa di lasciare lo studio di queste situazioni a pedagogisti o psicologici o improvvisati "esperti" di Didattica della Matematica che non siano matematici?

8. Due situazioni ironiche

Non siamo sicuri che il lettore matematico abbia apprezzato il fatto che, anche su temi estremamente elementari di Matematica, abbiamo mostrato che solo un matematico professionista possa capire eventuali problemi di carattere didattico. Ci è servito ciò solo per sfatare il mito che il matematico professionista che decide di occuparsi di Didattica della Matematica debba solo aver a che fare con temi molto tecnici e formali, lasciando quelli di contenuto più "elementare" ad altri studiosi, anche se non matematici. Crediamo-riteniamo-speriamo di aver mostrato (di-mostrato sarebbe pretendere troppo!) che così non è.

Ci soffermiamo ancora su due ulteriori esempi di livello estremamente elementare che ci sono occorsi, ancora una volta tesi a rafforzare la nostra opinione.

Entrambi sono incredibili, lo sappiamo; e uno dei due rasenta il ridicolo, ma ci pare molto significativo per intendere quel che succede nella mente di uno studente quando apprende la Matematica in modo stereotipato, come spesso accade.

0 è l'elemento neutro della sottrazione in N?

"$e \in \mathbb{N}$ è elemento neutro dell'addizione in $\mathbb{N}$ se $\forall n \in \mathbb{N},\ n + e = n$". (Letto sugli appunti di uno studente di scuola secondaria di II grado, dunque sotto dettatura del docente o copiando dalla lavagna). Dunque, 0 è l'elemento neutro di + in $\mathbb{N}$.

Ma allora, così definita l'idea di elemento neutro, 0 è anche elemento neutro della sottrazione in $\mathbb{N}$ … Infatti: $\forall n \in \mathbb{N},\ n - 0 = n$.

Il fatto è che nella prima definizione manca una parte dell'enunciato:

$e \in \mathbb{N}$ è elemento neutro dell'addizione in $\mathbb{N}$ se: $\forall n \in \mathbb{N},\ n + e = n = e + n$.

Applicando alla sottrazione:

$e \in \mathbb{N}$ è elemento neutro della sottrazione in $\mathbb{N}$ se: $\forall n \in \mathbb{N},\ n - e = n = e - n$.

In tal caso è facile rendersi conto che la sottrazione NON ha elemento neutro; basta un banale controesempio: $5-0=5\neq 0-5$.

[Naturalmente tutta la precedente argomentazione dipende dal fatto se si sappia già oppure no che l'addizione è commutativa, cosa che generalmente si afferma prima dell'esistenza dell'elemento neutro. Diverso è il dare una definizione generale di elemento neutro per un'operazione per la quale non si afferma nulla riguardo alla commutatività: ovviamente in tal caso occorre richiedere la condizione in entrambi i sensi].

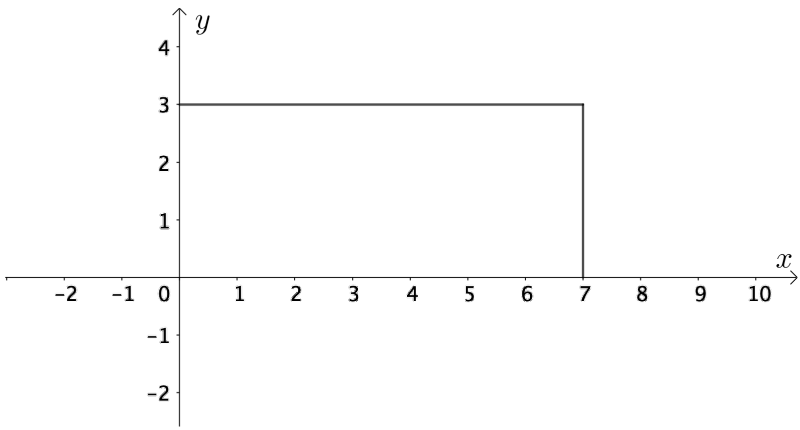
[Ci sarebbe poi da mostrare che l'elemento neutro *e* dell'addizione in $\mathbb{N}$ è unico, ma non esageriamo …].

Se perfino alcuni docenti laureati in Matematica sbagliano su questo tema e non si rendono conto delle conseguenze del loro errore, come possiamo pensare che sia un non matematico a darsi conto di ciò per entrare in dettaglio e trovare una soluzione?

L'integrale di una funzione costante

A uno studente di fine scuola secondaria superiore, valutato con altissimi voti, abbiamo proposto il seguente esercizio sugli integrali.

Calcolare l'area del rettangolo rappresentato qui di seguito usando l'integrale.

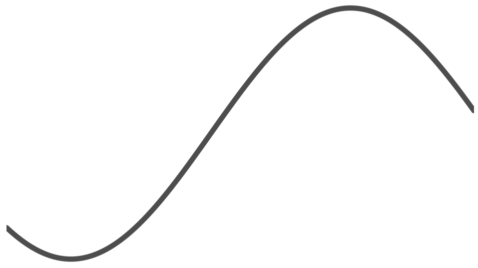


L'equazione della retta che passa per il punto (0; 3) parallela all'asse delle ascisse è $y = 3$; dunque la risoluzione dell'esercizio è:

$$\int_0^7 3\,dx = 3\cdot[x]_0^7 = 3\cdot(7-0) = 21$$

com'era evidente già con una sola occhiata.

Grande la perplessità dello studente e nostra nel cercare di capire l'origine della sua! Fino a che non sbotta, infastidito: "Non si può fare, la funzione deve essere fatta così" e disegna quanto segue.



Se uno lo pensa bene, in tutti i libri di Analisi elementare, che in altri contesti si chiama Calcolo, quando si introduce l'idea di integrale, sempre la funzione $y = f(x)$ si presenta con un andamento variabile, mai rettilineo.

Quel che si vuol intendere con quell'andamento che vorrebbe essere casuale e non specifico è la generalità dell'andamento stesso; quel che lo studente intuisce, invece, è che *non può* essere rettilineo; mai un docente di scuola secondaria pensa a questi pseudo apprendimenti che si formano spontaneamente e che noi chiamiamo misconcezioni (D'Amore & Sbaragli, 2005). Misconcezioni che solo un matematico può capire. Infatti, nonostante siamo a un livello matematico minimo tecnico e formale, nessun altro potrebbe capire il senso, il funzionamento logico delle scelte eseguite, né il fraintendimento del povero studente …

Lo studio delle misconcezioni nell'apprendimento della Matematica è di necessità appannaggio dei matematici, di quei matematici che si dedicano alla ricerca scientifica in Didattica della Matematica.

9. Non è cambiando il curricolo (o il programma) che si risolve il problema

Negli anni '70 in tutto il mondo ci si affannò a cambiare i curricola nazionali di Matematica, iniziando con gli USA; ma poi questo fatto riguardò tutte le nazioni. Fu il momento della nascita della famigerata *New Mathematics* (in Italia *Matematica moderna*) o denominazioni analoghe, dominata dall'inserimento della teoria cosiddetta "ingenua" degli insiemi al posto della Matematica scolastica tradizionale, fin dalla scuola primaria. (La storia di questo movimento si può trovare, per esempio, in D'Amore, 2021). Erano gli anni del trionfo strutturale dei bourbakisti, ma un conto è cercare di creare un linguaggio matematico comune a tutta la Matematica, ben altro è imporlo nel mondo della scuola.

Non furono i matematici i docenti di scuola, né i pedagogisti, né gli psicologi a frenare questo assurdo modo di fare, ma i matematici; famose sono le grida negative addirittura di premi Fields.

E fu il matematico francese Guy Brousseau che, ribellandosi a tanta follia, riuscì a studiare tutto ciò da un punto di vista scientifico, mostrandone le efferatezze e la negatività, sancendo con ciò la nascita di quella disciplina che oggi si chiama Didattica della Matematica.

In molti paesi del mondo le cose si trascinarono più a lungo, in altri l’ondata non giunse nemmeno. In questi ultimi paesi i cambiamenti si fecero per altri motivi, legati per esempio a prestiti richiesti all’IDA (International Development Association), l’organo della Banca Mondiale che concede sì tali prestiti ma chiede drastici cambi innovativi nel programma di insegnamento nelle scuole, soprattutto delle materie scientifiche e tecniche (*in primis* della Matematica). L’idea è quella di potersi garantire la restituzione del prestito di lì a 20 anni, grazie al miglioramento culturale del paese, grazie al rinnovamento dei suoi programmi di studio. Un’idea geniale, vincente, una vera garanzia.

E così, per verificare che davvero un Paese che richiedeva un prestito stesse proponendo un programma innovativo che potesse garantire un reale rinnovamento positivo di quella nazione, il Banco mandava in missione esperti a controllare che quel che si stava proponendo fosse coerente e promettente. Di solito venivamo mandati come esperti persone con alle spalle ricerche sul funzionamento della scuola, programmi, *curricola*, cioè per lo più dirigenti scolastici con larga esperienza e pedagogisti.

Ma a uno degli autori di questo articolo capitò all’inizio degli anni ’90 di essere inviato come esperto da parte di una banca internazionale in un paese cosiddetto in via di sviluppo che aveva promesso drastici cambi curricolari in Matematica (che era poi la disciplina nella quale più di ogni altra la banca chiedeva cambi, miglioramenti e ammodernamenti, essendo la disciplina trainante dei settori più scientifici, tecnologici e finanziari).

E così un matematico capì perfettamente, leggendo i programmi proposti dal giovane ministro dell’istruzione, ispirato e suggestionato da chissà chi, che l’aver posto: monoidi, gruppi, domini d’integrità, anelli, campi vettoriali, algebra di Boole … nella scuola primaria era solo un modo maldestro di tentare di far credere alla banca di aver dato seguito alle richieste.

Se invece di un matematico fosse stato inviato un esperto di tecniche scolastiche o di lavori di gruppo, quei termini usati sarebbero stati interpretati per buoni, come di fatto in certi paesi è accaduto, come moderni contenuti di Matematica per un paese che si vuole sviluppare tecnicamente in fretta …

Non è mettendo nomi altisonanti di temi matematici di alto livello che si cambia una scuola nazionale, un curriculum; ma solo un esperto disciplinare è in grado di rendersene conto.

Ringraziamenti

Gli autori ringraziano gli anonimi referee per le opportune osservazioni criticamente costruttive fatte alla precedente versione del testo di questo articolo. Esse sono state assai utili per una revisione che ha portato all'attuale versione.

Riferimenti bibliografici

Ackermann-Valladolao, E., Audétat, J., Giddey, C., Lock, N., Piguet-Chevalley, D., Reith, E., & Saada-Robert, M. (1983). Formation et actualisation des modèles du sujet en situation de résolution de problème. *Archives de psychologie*, *51*, 61–70.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1992). *Infiniti*. Milano: Angeli.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1998). Epistemological and didactical obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Proceedings of the I Cerme of Osnabrük*, agosto 1998.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). "Lo vedo, ma non ci credo". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22B(5), 465–494. [In lingua spagnola: Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo". Obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de un teorema de Georg Cantor que involucra al infinito actual. *Educación matemática*, *11*(1), 5–24]. [In lingua inglese: Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). "I see it but I don't believe it …". Epistemological and didactic obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *36*(1), 93–120].

Arrigo, G., & D'Amore, B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo…", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*, *16*(1), 4–57.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática*, *16*(2), 5–20.

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *L'infinito matematico: Storia, epistemologica e didattica di un tema affascinante*. Bologna: Pitagora.

Azhari, N. (1998). *Using the intuitive rule "Same of A, same of B" in conservation tasks*. Unpublished manuscript, Tel Aviv University, Tel Aviv, Israel.

Bagni, G. T. (2001). Infinito e infinitesimo potenziale ed attuale: Una sfida per la scuola secondaria superiore. *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 42, 9–20.

Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2006). *Leonardo e la matematica*. Firenze: Giunti. Nuova edizione 2019. [In lingua spagnola: Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2007). *Leonardo y la Matemática*. Bogotá: Magisterio]. [In lingua portoghese: Bagni, G. T., & D'Amore, B. (2012). *Leonardo e a Matemática*. São Paolo (Brasil): Livraria da Física].

Becerra Galindo, H. M. (2020a). *Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente* (Tesis de doctorado). DIE Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis Educación matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.

Becerra Galindo, H. M. (2020b). La conciencia semiótica de los docentes de matemática en la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos. *Paradigma*, *41*(2). http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/issue/view/73

Bourbaki, N. (1970). *Éléments de Mathématiques: Théorie des ensembles*. Paris: Hermann.

Bunge, M. (1985). *Pseudociencia y ideología*. Madrid: Alianza.

Cavaillès, J. (1962). *Philosophie mathématique*. París: Hermann.

Chini Artusi, L. (Ed.). (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI.

Courant, R., & Robbins, H. (1941). *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. London: Oxford University Press. [Varie edizioni in lingua italiana: Torino: Bollati Boringhieri].

D’Amore, B. (1991). logica Logica LOGICA la didattica della logica fra gli 8 ed i 15 anni. In B. D’Amore (Ed.), *La Matematica fra gli 8 ed i 15 anni* (pp. 79–90). Bologna-Roma: Apeiron.

D’Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Prefazioni di Colette Laborde e di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [Primo Premio Assoluto “Lo Stilo d’Oro”, sezione Didattica, X Edizione del Premio Nazionale di Pedagogia Pescara]. [Il libro è stato recensito da Hermann Masier (2001), *ZDM*, *33*(4), 103–108]. [Edizione in lingua spagnola: D’Amore, B. (2006). *Didáctica de la Matemática*. Prólogos de Colette Laborde, Guy Brousseau y Luis Rico Romero. Bogotá: Editorial Magisterio]. [Edizione in lingua portoghese: D’Amore, B. (2007). *Elementos da Didática da Matemática*. Prefácios de Ubiratan D’Ambrosio, Luis Rico Romero, Colette Laborde e Guy Brousseau. São Paulo: Livraria da Física].

D’Amore, B. (2001a). *Scritti di epistemologia matematica: 1980–2001*. Bologna: Pitagora.

D’Amore, B. (2001b). Considerazioni attorno alla logica di Gergonne. In B. D’Amore (Ed.), *Scritti di epistemologia matematica: 1980–2001* (pp. 17–54). Bologna: Pitagora.

D’Amore, B. (2005). Secondary school students’ mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the learning of mathematics*, *25*(2), 26–32.

D’Amore, B. (2007). Voci per il dizionario: F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, & W. Wiater (Eds.), *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto.* Torino: Bollati Boringhieri. Voci: Didattica disciplinare (pp. 72–75), Formazione in scienze naturali (pp. 140–142), Formazione in matematica (pp. 145–147), Scienza (pp. 335–337). [Edizione in lingua tedesca: (2010). *Pädagogische Leitbegriffe, im deutsch-italienischen Vergleich.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren. Fachdidaktik (pp. 98–101), Mathematische Bildung (pp. 227–228), Naturwissenschaftliche (pp. 255–258), Wissenschaft (pp. 362–364)].

D’Amore, B. (2021). *La matematica come strumento critico: Riflessioni su didattica, storia, letteratura, arte, magia e religioni*. Pitagora: Bologna.

D’Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estévez, M., Fandiño Pinilla, M. I., Piatti, A., Rojas Garzón, P. J., Rodríguez Bejarano, J., Romero Cruz, J. H., & Sbaragli, S. (2004). Il “senso dell’infinito”. *La matematica e la sua didattica*, *18*(4), 46–83. [Versione ampliata in lingua spagnola: D'Amore, B., Arrigo, G., Bonilla Estévez, M., Fandiño Pinilla, M. I., Piatti, A., Rodríguez Bejarano, J., Rojas Garzón, P. J., Romero Cruz, J. H., & Sbaragli, S. (2006). El "sentido del infinito". *Epsilon*, *22*(2), 65, 187–216]. [Versione in lingua inglese: Sbaragli, S., Arrigo, G., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Frapolli, A., Frigerio, D., & Villa, O. (2011). Epistemological and Didactic Obstacles: the influence of teachers' beliefs on the conceptual education of students. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, *10*(1–2), 61–102].

D'Amore, B., & Duval, R. (2019). L'educazione dello sguardo in geometria elementare e in arte figurativa: Quali variabili cognitive e didattiche sono coinvolte? Come si rappresenta in arte l'impossibilità? Quali elementi semiotici possono essere coinvolti nell'arte? *La matematica e la sua didattica*, *27*(1), 47–67.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*, *18*(3), 27–50.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 165–190. [In lingua spagnola: D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). Relaciones entre área y perímetro: Convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime*, *10*(1), 39–68].

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, *21*(1), 87–92. Atti del Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino, 6 luglio 2006.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). La didattica della didattica della matematica: Esperienze personali e spunti critici di discussione e ricerca. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *36B*(4), 325–353. [In lingua spagnola: D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). La didáctica de la didáctica de la matemática: experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones. In B. D'Amore, & L. Radford (2017), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefacios de Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello (pp. 41–66). Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas].

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2019). *Le difficoltà di apprendimento in matematica: Il punto di vista della didattica*. Prefazioni di Andrea Canevaro e George Santi. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 139–163.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2017). *La matematica e la sua storia*. Vol. I. *Dalle origini al miracolo greco*. Prefazione di Umberto Bottazzini. Bari: Dedalo.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2019). *La matematica e la sua storia*. Vol. III. *Dal Rinascimento al XVIII secolo*. Prefazione di Luigi Pepe. Bari: Dedalo.

D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia*. Vol. IV. *Dal XVIII al XXI secolo*. Prefazione di Gabriele Lolli. Bari: Dedalo.

Dieudonné, J. (1987). *Pour l'honneur de l'esprit humain*. Paris: Hachette.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leur modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23*(3), 295–342.

Fandiño Pinilla, M. I. (2011). Per una buona didattica è necessario un buon Sapere. *Bollettino dei docenti di matematica*, *32*(62), 51–58.

Fandiño Pinilla, M. I. (2021). *Le frazioni: Matematica, storia e didattica*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla, M. I., & D'Amore, B. (2009). *Área y perímetro: Aspectos conceptuales y didácticos*. Prefacio de Carlos Vasco Uribe. Bogotá: Magisterio. [In lingua italiana: Fandiño Pinilla, M. I., & D'Amore, B. (2019). *Le relazioni fra area e perimetro dei poligoni: Alcune riflessioni matematiche, storiche e didattiche*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Bologna: Pitagora].

Fischbein, E. (1963). *Conceptele figurale: Cercetari teoretice si experimentale asupra naturii entitatilor geometrice si a evolutiei lor în ontogeneza*. Bucuresti: Editura Academici Republicii Populare Romine. [Traduzione in lingua inglese: Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162].

Fischbein, E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In L. Chini Artusi (Ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base* (pp. 122–132). Bologna: Zanichelli-UMI.

Fischbein, E., & Vergnaud, G. (1992). *Matematica a scuola: Teorie ed esperienze* (B. D'Amore, Ed.). Bologna: Pitagora.

Galilei, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e i movimenti locali.* Leida (Paesi Bassi): Ludovico Elzeviro. [Edizione 1964: Torino: Einaudi].

Gallo, E. (1985). Geometria, percezione, linguaggio. *L'Educazione matematica*, *6*(1), 61–104.

Gallo, E. (1992a). Elaboration of models for problem resolution in interaction with 14-15-year-old pupils. In L. Bazzini & H.-G. Steiner (Eds.), *Proceedings of the Second Italian-German Bilateral Symposium on Didactics of Mathematics* (pp. 289–301). Osnabrueck.

Gallo, E. (1992b). Le contrôle dans la résolution de problèmes: Une situation de classe. *Proceedings CIEAEM 44*, Chicago.

Gallo, E., Amoretti, C., & Testa, C. (1989). Sul ruolo dei modelli nella risoluzione di problemi di geometria: controllo ascendente e discendente. *Quaderni di ricerche in didattica della matematica*, 7. Torino: Università di Torino.

Gallo, E., Ferrari., M., & Speranza, F. (Eds.). (1995). *La ricerca in didattica della matematica: finalità, contenuti, esempi*. Quaderni CNR, n. 15. Pavia: CNR.

Gallo, E., Giacardi, L., & Roero, C. S. (Eds.). (1996). *Conferenze e seminari 1995–1996*. Associazione Subalpina Mathesis - Seminario di Storia delle Matematiche "T. Viola", Torino.

Gallo, E., & Testa, C. (1991), Modèles, stratégies, types de contrôle dans la résolution d'un problème graphique de géometrie: *Cahiers de didactique des mathématiques*, 8, 55–78.

Gallo, E., Testa, C., & Amoretti, C. (1989). Utilisation de modèles géometriques en situation de résolution de problèmes: contrôle descendant et ascendant. *Actes de*

la 41e CIEAEM, Bruxelles.
Kuhn, T. S. (1957). *The Copernican revolution*. Cambridge (Mass): Harvard University Press. [Trad. it.: Torino, Einaudi, 1972].
Lakatos, I., & Musgrave, A. (Eds.). (1960). *Criticism and the growth of knowledge*. Cambridge: Harvard University Press. [Trad. it. 1976. Milano: Feltrinelli].
Noether, E., & Cavaillès. J. (Eds.). (1937). *Briefwechsel Cantor-Dedekind*. París: Hermann.
Popper, K. (1934). *Logik der Forschung*. Vienna: J. Springer.
Romberg, T. A. (1988). Necessary ingredients for a theory of mathematics education. In H. G. Steiner & A. Vermandel (Eds.), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education. Proceedings of the 2nd TME Conference, Bielefeld* (pp. 97–112). Bielefeld Antwerpen: IDM Publications.
Stavy, R., & Tirosh, D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.
Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.