Empoderamiento docente: Variación y predicción en matemáticas

Teacher empowerment: Variation and prediction in mathematics

Daniela Reyes-Gasperini,[1] Leonardo Federico Palmeri[2,3] y Ricardo Cantoral Uriza[1]

[1] *Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, Ciudad de México, México*

[2] *Escuela de Educación Secundaria Técnica N° 1, El Talar, Buenos Aires, Argentina*

[3] *Instituto Superior de Formación Docente y Técnica Nº 93, San Vicente, Buenos Aires, Argentina*

Abstract. *This article presents an analysis of the role played by teacher empowerment based on a series of experimental results of an educational intervention action. A learning situation designed by the PIDPDM was adapted and implemented under the support of the evolution of practices, namely: an evolution that begins with buying, serializing, then predict and, finally, estimating. The design uses the container filling as a factual resource to mentally recreate predictive practices. In the first place, the emergence of a "new relationship" with the mathematical knowledge that the participant teacher-researcher declares through narrative is documented, in order to highlight aspects of the social construction of mathematical knowledge among his students. The article has two levels of analysis, the teacher's dialogues with his students and the reflections of the participating students. Both levels are processed through discourse analysis, classroom interactions with a socio-epistemological perspective, identifying the students' elaborations that contribute to the development of their own variational thinking.*

Keywords: learning situation, development of mathematical thought, teacher empowerment, variational thinking.

Sunto. *Questo articolo presenta un'analisi del ruolo svolto dall'empowerment degli insegnanti sulla base di una serie di risultati sperimentali di un'azione di intervento educativo. Una situazione di apprendimento progettata dal PIDPDM è stata adattata e implementata con il supporto dell'evoluzione delle pratiche, vale a dire: un'evoluzione che inizia con l'acquisto, proseguendo con la serializzazione, per poi prevedere e, infine, stimare. Il design utilizza il riempimento del contenitore come una risorsa reale per ricreare mentalmente le pratiche predittive. In primo luogo, l'emergere di una "nuova relazione" con la conoscenza matematica che l'insegnante-ricercatore partecipante dichiara attraverso la narrazione è documentata, al fine di evidenziare aspetti della costruzione sociale della conoscenza matematica tra i suoi studenti. L'articolo ha due livelli di analisi, i dialoghi dell'insegnante con i suoi studenti e le riflessioni degli studenti partecipanti.*

Entrambi i livelli sono elaborati attraverso l'analisi del discorso, le interazioni della classe con una prospettiva socio-epistemologica, individuando le elaborazioni degli studenti che contribuiscono allo sviluppo del proprio pensiero variazionale.

Parole chiave: situazione di apprendimento, sviluppo del pensiero matematico, emancipazione docenti, pensiero variazionale.

Resumen. *Este artículo presenta un análisis del papel que juega el empoderamiento docente con base en una serie de resultados experimentales de una acción de intervención educativa. Se adaptó e implementó una situación de aprendizaje diseñada por el PIDPDM bajo el sustento de la evolución de prácticas, a saber: una evolución que comienza con comprar, siguiendo con seriar, para luego predecir y, finalmente, estimar. El diseño utiliza al llenado de recipientes como un recurso factual para recrear mentalmente las prácticas predictivas. En primer lugar, se documenta la emergencia de una "nueva relación" con el conocimiento matemático que declara mediante narrativa el profesor-investigador participante, a fin de poner en evidencia aspectos de la construcción social del conocimiento matemático entre sus estudiantes. El artículo tiene dos planos de análisis, los diálogos del profesor con sus alumnos y las propias reflexiones de los estudiantes participantes. Se procesan ambos niveles mediante un análisis del discurso, las interacciones áulicas con una perspectiva socio-epistemológica, localizando las elaboraciones de los estudiantes que coadyuvan al desarrollo de su propio pensamiento variacional.*

Palabras clave: situación de aprendizaje, desarrollo del pensamiento matemático, empoderamiento docente, pensamiento variacional.

1. Introducción

Esta experiencia es fruto de una acción de empoderamiento, una iniciativa de un profesor participante del Programa Nacional Aprender Matemática (PNAM) en el Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje en Matemáticas (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología [ME], 2018). El PNAM es un programa de la Secretaría de Innovación y Calidad Educativa del Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de Argentina, con el apoyo de la Organización de Estados Iberoamericanos, sede Argentina (OEI ARG) y del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM) del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) de México, que en conjunto realizan una intervención colaborativa con Argentina.

Si bien el PNAM cuenta con cuatro encuentros presenciales y un acompañamiento virtual durante un periodo de diez meses, donde miembros del equipo académico del PIDPDM, Cinvestav-IPN, México, trabajan de manera conjunta con profesoras y profesores de matemáticas de todas las provincias de la República Argentina, esta experiencia nace de las reflexiones conjuntas de tiempo atrás.

La propuesta se fundamenta teóricamente en la construcción social del conocimiento matemático que impulsa la teoría socioepistemológica de la matemática educativa (TSME) (Cantoral, 2013), un paradigma alternativo basado en la pragmática. A partir del diseño de *situaciones de aprendizaje* sustentadas en *prácticas socialmente compartidas*, se promueve el *desarrollo del pensamiento matemático* y la significación del conocimiento mediante el uso. En particular, se promueve el empoderamiento docente entendido como cambio de relación al conocimiento matemático escolar, a su vez el empoderamiento es concebido, explícitamente, como una práctica emancipadora para el desarrollo profesional docente (Reyes-Gasperini, 2016).

En este caso, el profesor Francisco[1], participante de uno de los grupos de trabajo, luego del primer encuentro, volvió a su práctica docente regular y ante la necesidad de trabajar en su curso el tema matemático de derivada de funciones reales de variable real, tomó el solo la iniciativa (señal de empoderamiento) de solicitar al equipo del PIDPDM algún diseño de situación de aprendizaje que pudiese abordarse desde la perspectiva socioepistemológica. Así fue como recibió una primera propuesta con los fundamentos correspondientes, se apropió de ella mediante su estudio y puesta en escena. Posteriormente él mismo realizó un primer análisis libre de lo ocurrido en la clase, registrándolo como auto narrativas reflexivas poniendo el énfasis en el quehacer interpretativo de sus alumnos. Su conclusión principal consistió en presentar una mejora, tanto en las dimensiones socioemocionales, como en las cognitivas cuando se puso en situación de construcción social a sus alumnos. El diseño de la actividad fue escenificado, si bien fue concebida previamente, el profesor realizó una serie de adaptaciones interesantes al propio contexto escolar donde se desempeña en la provincia de Buenos Aires.

Se muestran a continuación algunos elementos preliminares que permitirán, a la postre, el análisis de la experiencia desde el punto de vista del empoderamiento docente. El eje del pensamiento matemático elegido fue el pensamiento y lenguaje variacional. Veamos a continuación una breve explicación de su contenido. Es decir, cuando se cuenta con una situación de aprendizaje basada en la TSME que propicie los espacios para el desarrollo de conjeturas, se ponen a prueba sus ideas confrontándolas con las de sus compañeros y puedan jugar roles diferenciados al ponerse en el lugar del otro para comprender las razones de sus planteamientos, estas implementaciones les estimulan al trabajo con una predisposición favorable hacia la construcción de nuevas redes de nociones que si bien ya manejaban parcialmente, no eran necesariamente interrelacionados de forma consiente, de modo que al hacerlo, se desarrollan o modifican los significados mediante el uso.

[1] Nombre ficticio para guardar anonimato.

2. El pensamiento y lenguaje variacional en la escuela

Uno de los ejes del pensamiento matemático implícito en la educación básica obligatoria y explícito en la educación superior y la vida profesional, es justamente el que se ocupa de la *variación* y el *cambio*. El cambio como cualidad subjetiva se percibe, mientras que la variación, en tanto cantidad objetiva, se compara y se mide. De modo que para analizar los sistemas dinámicos o para comparar simplemente estados sucesivos del cambio, se precisa del *pensamiento variacional*, este pensamiento sirve para construir hipótesis predictivas y para reconocer el efecto del cambio en la variación.

El *pensamiento y lenguaje variacional* está presente, por tanto, en una gran cantidad de situaciones de la vida diaria, por ejemplo, en el manejo del lenguaje natural para la percepción del clima atmosférico se emplean expresiones como “frío”, “templado”, “caliente” y adjetivos como “muy”, “más”, “súper”. Las temperaturas primero son percepciones, pero pueden medirse con base en un sistema de referencia y una unidad de medida adecuada, así se determinan estados: E_1, E_2, E_3 (“frío”, “templado”, “caliente”) y estados adjetivados $E_i + e_i$ (“muy frío”, ...). O también para describir las alturas de un cuerpo de agua en un recipiente, solemos usar gestos sugerentes hacia la superficie superior. Estos lenguajes variacionales, si bien metafóricos, conservan el profundo sentido de la matematización del cambio.

Estas interacciones lingüísticas de corte sociocultural precisan mediaciones entre percepción (individual) y medición (compartida). La variación, en consecuencia, para ser construida requiere además de una componente cognitiva que represente internamente al cambio, se precisa de un lenguaje que materialice la evolución del sistema y la comparación de estados sucesivos. Tres preguntas claves fueron necesarias para organizar la experiencia del cambio: ¿Qué cambia?, ¿Cómo cambia?, y ¿Por qué cambia como lo hace?

> Empecemos con una caracterización: El *pensamiento y lenguaje variacional* estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los procesos cognitivos y culturales con los que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Es a la vez que una ruta para el desarrollo, una línea de investigación que posee una orientación múltiple, ya que se ocupa primeramente de las estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y fenomenológico, en segundo término estudia las funciones cognitivas que las personas asignan mediante el uso de conceptos y propiedades del cambio, finalmente también se ocupa de las tareas y las situaciones que abordan y resuelven en el terreno social mediante prácticas variacionales consideradas en el aula, el laboratorio y en la vida diaria. (Cantoral, 2019)

El caso que presentamos enseguida, el llenado de recipientes con flujo constante ilustra la forma en que los jóvenes construyen sistemas de referencia y unidades de medida, así como explicaciones causales de la evolución del proceso de llenado. Sus palabras reflejan una cognición situada que secuencia los cambios y mide progresivamente sus variaciones (incrementos de altura con el paso del tiempo). Debido a ese análisis es que pueden predecir el desenlace y su estado final, se basan en los datos de origen (recipientes cilíndricos vacíos, llenándose con flujo constante). Estos sistemas dinámicos, denominados determinísticos, pueden ser matematizados mediante una expresión lineal general, para cada x dado, como sigue:

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+o(h)$$

con $\lim_{h\to 0}\frac{o(h)}{h}=0$, es decir, da lugar a la definición de derivada de f:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Para el caso de los juicios de les estudiantes de esta experiencia, se registra cómo es que construyen una secuencia temporal t_1, t_2, t_3, … para tratar la evolución del sistema del primero al segundo momento, del segundo al tercero, etc.

Consideramos que en las expresiones cotidianas se "ocultan" los primeros hechos, la denominada etapa factual del significado. Al comparar recipientes de diferente diámetro, pero con la misma capacidad, realizan procedimientos pre simbólicos que anticipan el desenlace del fenómeno. Es justo ahí donde se construyen conjeturas bajo distintos tipos de razonamiento: inductivo, deductivo y abductivo y emergen como producto las prácticas predictivas. En una segunda fase del proceso de construcción de significado se presentan los procedimientos, por ejemplo, a mayor diámetro, más lento sube. Al final, emerge un significado simbólico, la pendiente de la recta que describe que el crecimiento es mayor para el cilindro más delgado.

En síntesis, es el pensamiento y lenguaje variacional el que opera como sustento de sus expresiones verbales, gestuales, visuales o simbólicas formales. Ahora bien, este proceso fue desarrollado por la colaboración entre el diseño de la situación de aprendizaje y su implementación-adaptación que realiza el profesor Francisco. Este doble esfuerzo, entender la racionalidad del diseño y su puesta *ad hoc* en un aula concreta, brinda evidencias de un proceso de empoderamiento. A continuación, damos una síntesis de dicho proceso.

3. El proceso de empoderamiento docente

El profesor Francisco, quien estuvo a cargo de esta experiencia, en un primer momento, de manera colegiada con un grupo de cincuenta colegas profesores (aproximadamente) y un miembro del equipo académico del PIDPDM, Cinvestav-IPN, vivenció una dinámica de problematización para la matemática escolar. En primer término, reflexionó sobre cómo el discurso matemático escolar provocaba exclusión de la posibilidad de una construcción social del conocimiento matemático (Soto & Cantoral, 2014), reconociendo sus elementos y ejemplificándolos en el trabajo con funciones (aspecto I). Asimismo, se revisaron distintas investigaciones que estudiaron la noción de función en distintos escenarios analizando la correlación de sus resultados con lo que sucede habitualmente en sus aulas. Posteriormente, se analizaron actividades típicamente escolares para identificar, con base en bibliografía especializada (aspecto II), cuáles eran las fortalezas y las áreas de oportunidad de cada una (aspecto III). Esta secuencia de aspectos tenía como fin analizar y poner en evidencia que toda actividad planteada es propensa a un rediseñado pues, todo enunciado se acompaña de la gestión áulica, didáctica y matemáticamente hablando, de un profesional de la educación (aspecto IV).

Como paso siguiente, se vivenció una situación de aprendizaje titulada "Vos, él y ella. ¿Quién es más alto?" (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología [ME], 2019), donde reflexionó sobre las distintas argumentaciones, posibles estrategias y cómo las acciones, actividades y prácticas eran la base para el trabajo con la construcción del conocimiento matemático en el escenario áulico (aspecto V). Para finalizar, se analizaron los fundamentos de la situación de aprendizaje y se recuperó el análisis realizado de las actividades típicamente escolares para confrontar con la situación de aprendizaje, con el fin de generar rediseños que permitieran trabajar con las etapas factual, procedimental y simbólica de una situación de aprendizaje (aspecto VI). Es decir, hacer un rediseño que, con base en prácticas socialmente compartidas, promoviera que la interacción con la situación comience por la acción de los estudiantes sobre datos manipulables de manera tangible o abstracta, pasando por la construcción de estrategias matemáticas que permitan transitar hacia el trabajo con el conocimiento matemático significado que habilite la escolarización de los conceptos matemáticos.

Teóricamente, esta nueva relación con el conocimiento matemático escolar se produjo a partir de varias acciones realizadas durante el primer encuentro que se fueron desarrollando con base en los elementos característicos que propician el proceso de empoderamiento docente. En primer lugar, se realizó una autocrítica del discurso hablado y de la actividad áulica, aunado al análisis de documentos escolares, es decir, el cuestionamiento de las *estructuras objetivables* del *discurso matemático escolar*, que refiere a la vivencia de la etapa individual o interior del proceso de empoderamiento. Esto, sumado a la etapa colectiva donde, con las y los colegas profesores, durante el encuentro se analizaron resultados de investigación con base en bibliografía especializada relacionada con las dificultades, alternativas de intervención, entre otras; a la vez que se analizó de manera crítica la información disponible, es decir, el reconocimiento de una disciplina de referencia, lo cual se relaciona con la etapa colectiva del empoderamiento docente, promovió la aportación a la comunidad ante el diseño, implementación y análisis de situaciones de aprendizaje por parte de Francisco, lo cual refiere a la etapa social del empoderamiento docente.

Tabla 1.
Teorización del proceso de empoderamiento de la TSME (Reyes-Gasperini, 2016, p. 193)

Teorización del Empoderamiento Docente desde la TSME

Cuestionamiento de las estructuras objetivables del dME.			**Etapa Individual o interior**
Autocrítica del discurso hablado	**Autocrítica de la actividad áulica**	**Análisis crítico de documentos escolares**	
Reconocimiento de una disciplina de referencia			**Etapa Colectiva**
Consideración de bibliografía especializada	**Participación activa en espacios de desarrollo profesional**	**Análisis crítico de información disponible**	
Aportaciones a la comunidad			**Etapa Social**
Trabajos fundamentados teóricamente	**Diseño, implementación y análisis de situaciones de aprendizaje**		
Participación en espacios para la pme de colectivos docentes			
Diálogo Colectivo	**Profesores Turores**		

Así, el profesor Francisco está inmerso en un proceso de empoderamiento docente que, gracias a su toma de iniciativa, lo lleva a realizar innovaciones didácticas en su práctica docente a partir de la problematización de la matemática escolar, conjugadas con las actitudes de liderazgo promovidas hacia la transformación de su entorno, en este caso, su acción educativa y el aprendizaje de sus estudiantes.

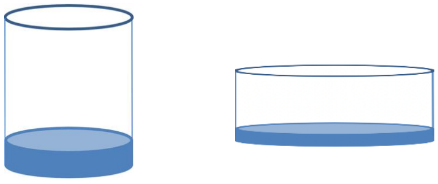
4. Descripción y análisis de la experiencia

Se trabajó en dos cursos de sexto grado de una secundaria técnica argentina, anteúltimo año de formación, de gestión estatal, con una cantidad de 25 y 26 estudiantes respectivamente, de entre 17 y 19 años, participando en una clase de tres horas tiempo real.

Para comenzar el desarrollo de la clase, se presentó la primera tarea de la situación de aprendizaje denominada "Llenado de recipientes" (PIDPDM, 2016), y sustentada en la investigación de Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017). La primera tarea, "Rectas llenando vasos", se plantea como sigue.

> *Tarea 1.* Considere recipientes cilíndricos con diferentes dimensiones y con la misma capacidad, que serán llenados con el mismo flujo constante. En la imagen siguiente se muestra la altura que alcanza el cuerpo del líquido al transcurrir un

segundo en cada recipiente.



1. ¿Cuántos segundos tardará en llenarse cada recipiente? Justifique su respuesta.
2. ¿En qué se diferencia el crecimiento de la altura del cuerpo del líquido en el recipiente B respecto del recipiente A? Justifique su respuesta.
3. Bosqueje la gráfica que represente el llenado de cada recipiente (la altura del cuerpo del líquido de cada recipiente con respecto al tiempo), en el mismo sistema coordenado.

La situación fue dictada y las imágenes que representaban los recipientes dibujadas en el pizarrón, por lo cual, para la primera pregunta la mayoría de los estudiantes querían tener una proporción de la parte del recipiente que se encontraba llena después del segundo, y así determinar el tiempo que tardarían en llenarse. Ante esta solicitud, el profesor decidió decir que representaba la quinta parte, por lo tanto, todos indicaron que tardarían 5 segundos en llenarse, ambos al mismo tiempo, dado que se indicó en el enunciado que ambos recipientes tenían la misma capacidad.

Análisis. La intención de la pregunta radica en que, ante la carencia de valores numéricos en el dibujo, se promueva la necesidad de construir una unidad de medida. En el caso de los estudiantes, la solicitud sobre la proporción que estaba dibujada refleja dicha necesidad para realizar la comparación con el recipiente completo, estableciendo la relación tiempo transcurrido–llenado realizado. Nótese que ante una tarea que no muestra una función en sus representaciones habituales (algebraica, gráfica o tabular), los estudiantes construyen una de las ideas fundamentales para la construcción del concepto de fracción, razón, proporción y variación, en este caso en particular, función bajo la noción del pensamiento variacional: ¿Qué cambia?, ¿Cómo cambia y por qué cambia?

En la segunda pregunta, algunos dijeron: "*El recipiente A se llenaba más rápido, porque el recipiente B era más gordo, entonces tardaba más*", esto no convenció a muchos y algunos cuestionaron esta idea preguntando: "*¿Entonces no se llenan al mismo tiempo?*". Ante esta pregunta, se volvió a reflexionar y se aseveró: "*No, sí se llenan al mismo tiempo*". Entonces, reformularon la intervención y dijeron: "*Parece que va más rápido porque se llena más alto a medida que pasa el tiempo, pero como es alto el vaso, llegan juntos*". Estas argumentaciones las acompañaban con representaciones con las manos de los segmentos que harían las veces de altura del líquido segundo a segundo.

> *Análisis*. En primer lugar, resulta importante analizar el objetivo de esta pregunta. Su intención fue la de analizar la variación de la altura del llenado respecto del tiempo, habiendo reflexionado anteriormente que el llenado se realizará en el mismo tiempo transcurrido. En particular, pretende confrontar las ideas “se llena más rápido” con la idea de que “la altura crece más rápido” (esto es una descentración del objeto). Hasta este momento, los estudiantes pueden detectar por confrontación de afirmaciones una respuesta que pareciera ser errónea, es decir, considerando que una afirmación contradice lo que acababan de afirmar, es que reformulan la afirmación. Sin embargo, aún faltaría confrontar por qué una u otra afirmación es correcta o no. Para ello, la situación de aprendizaje propone la siguiente pregunta.

La primera cuestión que surgió del grupo al dialogar respecto a la pregunta tres, fue la reflexión sobre la posición de las variables en los ejes cartesianos: “*¿Cuál va en la x y cuál en la y?*”. Casi todos indicaron que, como el enunciado decía *la altura respecto del tiempo*, el tiempo debía ir en el eje *x* y la altura del líquido en el eje *y*, porque: “*La altura del líquido dice que depende del tiempo, que sería x*”. Al momento de analizar las representaciones surgieron algunas variantes.

> *Análisis*. Tradicionalmente, las gráficas suelen estar representadas con sus variables, por tanto, la reflexión de qué variable va en cada eje es algo que los estudiantes pocas veces reflexionan. Por tal motivo, esta pregunta, intrínsecamente, realiza un cuestionamiento sobre la elaboración, lectura e interpretación en la construcción de gráficas.

Los estudiantes participaron escribiendo en el pizarrón realizando sus bosquejos de gráficas (Figura 1). En ese proceso debaten y construyen sobre conjeturas.

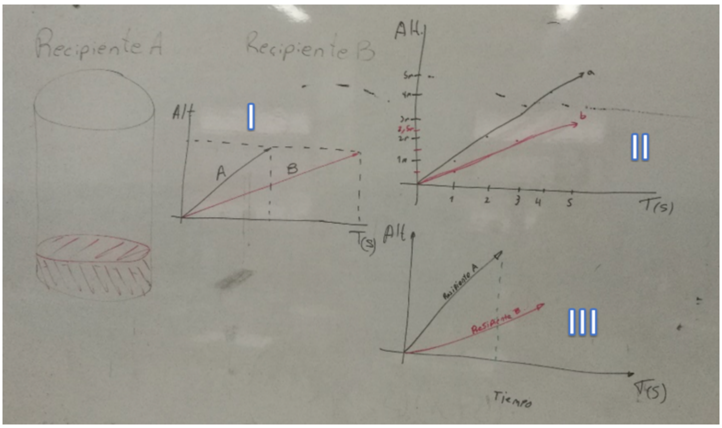


Figura 1. Bosquejo de gráficas de recipientes, pregunta 3, tarea 1.

En los tres bosquejos, en color negro se representa la gráfica correspondiente al recipiente A y en color rojo, la del recipiente B. La gráfica II resultó ser la que casi todos realizaron en sus hojas, exceptuando dos estudiantes que realizaron el gráfico I y III. Al observar las opciones, el que había realizado el gráfico III, indicó que en su mente pensaba en el gráfico II, pero que de "pereza", no lo dibujó tan preciso. El estudiante que realizó el gráfico I, argumentaba que ambas gráficas "*terminan en la misma altura*", dado que ambos recipientes tenían la misma capacidad, a lo cual se le preguntó: "*¿Cuánto tardó en llenarse el recipiente A y cuánto el recipiente B según informa tu gráfico?*" y los compañeros cuestionaban: "*Los tiempos de llenado no serían iguales… si fuera como vos lo dibujas, si yo miro tu gráfico, parece que uno tardó el doble de tiempo en llenarse que el otro*". Otro compañero agregó al trazar la línea punteada vertical en el gráfico I, a los 5 segundos: "*Si no, a partir de este punto, el líquido se estaría rebalsando*".

Análisis. Entre el gráfico I y gráfico II se pude presentar la confusión por la disposición de las variables respecto de los ejes, también que internamente lo que espera observar en el gráfico es el llenado de los recipientes, y no las alturas de llenado, son dos variables distintas, que ambas están en juego en esta actividad, pero solo una es objeto de análisis. La intención que subyace es que los alumnos tracen dos semirrectas, que cada una tenga diferente pendiente, que estará determinada por la razón de cambio entre la altura del líquido y el tiempo transcurrido en el llenado de cada recipiente.

Posterior a esta discusión, se presentó la segunda tarea: "Curvas llenando copas y matraces".

Tarea 2. Considere recipientes con forma de "cono" y "cono invertido", como los que se muestran a continuación, que son llenados al mismo flujo constante.

Recipiente A *Recipiente* B

1. Para el recipiente A, ¿cómo es el crecimiento de la altura en la parte inferior respecto a la parte superior?
2. Para el recipiente B, ¿cómo es el crecimiento de la altura en la parte inferior respecto a la parte superior?
3. Para cada recipiente, proporcione la gráfica que muestre la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo.

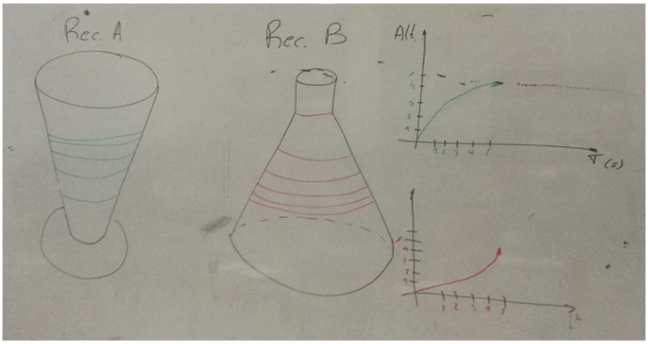


Figura 2. Propuesta 1 de bosquejo de gráficas de recipientes, tarea 2.

Para responder a las dos primeras preguntas, los estudiantes no parecían tener inconvenientes, e indicaban como obvias las respuestas. En el recipiente A sería cada vez menor la diferencia en el aumento de altura alcanzada por el líquido, mientras que en recipiente B, iría aumentando la diferencia de la altura. Para ambas situaciones, surgió la idea de que se llenaban más rápido o más lento, hasta que entre ellos mismos se criticaban haciéndose recordar que la velocidad de llenado siempre era constante. En el gráfico intentaron representar lo que serían las alturas al paso del tiempo, en el caso del recipiente B, el estudiante que lo dibujó dijo: "*Arranqué a marcar los de arriba, porque los de abajo quedaban muy apretados y no se iban a ver*".

> *Análisis*. En este caso, los dibujos de los estudiantes permitían representar lo que coloquialmente decían como "la altura aumenta cada vez más rápido o cada vez más lento", lo que se interpreta como el análisis del cambio y la variación y la variación sucesiva, posteriormente, se profundiza el análisis de la variación del fenómeno.

Respecto de los gráficos, hubo un estudiante que los trazó al revés, aunque señaló que se había confundido, pero se fueron dando algunos interrogantes no esperados. En el gráfico que representa el llenado del recipiente A, realizado con color verde, se produjo la siguiente interacción:

> *Estudiante 1*: Si pudiera continuar llenado, si fuera más alto, ¿el gráfico continuaría con una línea horizontal?"
>
> Nadie respondió y todos parecían estar muy atentos a su suposición. Como nadie aportó comentario, intervino el profesor.
>
> *Profesor*: Si continuara de manera horizontal, por como tu compañero hizo el gráfico, pareciera que siguiera así. De hacerlo, ¿estaría bien?, ¿qué significaría si siguiera de manera horizontal?"
>
> Silencio.
>
> *Estudiante 2*: Pero… si el gráfico fuese horizontal, ¿no sería que no está agregando nada de líquido? Sino tendría que subir como subiría el nivel del líquido.

Esta última intervención, concluyó en una puesta en común, un proceso consensuado, entre las y los estudiantes, que se trataba de una interpretación errónea de un gráfico pues era algo aproximado, con base en el análisis de lo que sucedería con el líquido del recipiente y su comportamiento.

> *Análisis*. En primer lugar, se enfatiza en la pregunta que realiza el profesor para intervenir: ¿Qué significaría si siguiera de manera horizontal? Este tipo de intervención promueve la argumentación de los estudiantes, pues más allá de considerar que es correcta o incorrecta su respuesta, vuelve a la situación contextual planteada y pregunta sobre el significado que tendría en el fenómeno un hecho particular, que la gráfica tuviera este comportamiento. En esta intervención está realizando una dialéctica entre la significación de la gráfica mediante y el contexto usado en la situación. Así es que el estudiante 2 recurre al fenómeno para dar respuesta.

Otro estudiante dijo que los hizo a ambos en el mismo sistema de ejes, como en la tarea anterior (Figura 3).

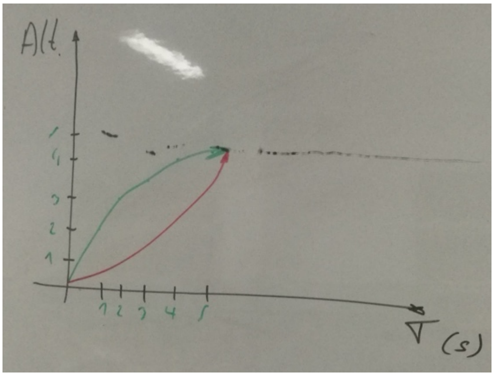


Figura 3. Propuesta 2 de bosquejo de gráficas de recipientes, tarea 2.

Algunos le dijeron que no se podía hacer eso, que ambas gráficas lleguen al mismo punto, entonces el profesor Francisco intervino y preguntó: “*¿Por qué no?*”. Respondieron que faltaban datos. La decisión del profesor fue esperar a que desarrollasen un poco más esa idea y continuó diciendo, que antes cortaban juntas, las dos gráficas (en el mismo valor de tiempo) porque el enunciado decía que tenían el mismo volumen, y si las llenaban a la misma velocidad, llegaban juntas. Entonces, por las dudas, pregunté: “*¿Qué tendría que pasar para que esa representación valga?*”. No dudaron en decir que deben tener igual capacidad.

> *Análisis*. La intencionalidad de repreguntar, en lugar de ofrecer la respuesta, era la de propiciar un espacio de debate donde los mismos estudiantes sean los protagonistas y que tengan que poner en juego las construcciones realizadas hasta ahora, y establecer algunas otras para poder sostener la argumentación frente a sus pares y con el docente. Las respuestas de los alumnos pondrían en evidencia la capacidad interpretativa que han logrado desarrollar frente a una representación

gráfica contextualizada por una situación problemática dada, como pueden pasar de un enunciado a un gráfico y como entonces poder realizar el trayecto inverso y transitar de un gráfico dado a redactar un enunciado nuevo que le corresponda.

Otra idea que surgió fue la de tomar el recipiente B y que siguiera *infinitamente* dijo uno de los estudiantes a lo cual, un compañero le respondió que eso no podía ser, porque: "*En algún momento se va a hacer tan finito que se tapa*". Bueno, retrucó: "*Antes que se cierre, que se mantenga angosto, como si fuera una pajita (sorbete)*", hizo una pausa, "*¿Cómo seguiría el gráfico?*". El profesor Francisco esquivó intencionalmente la pregunta indicando que entonces, ya no podían terminar en el mismo punto las dos gráficas, a lo cual la mayoría asintió: "*Si, si, ya sé, pero en ese punto seguiría derecha la gráfica, ¿No?*". Silencio. Otro compañero respondió que si fuera derecha, no pasaría el tiempo, haciendo referencia que imagino derecha, de manera vertical, entonces corrigió e indico que debía ser recta, y redobló, asegurando que sería casi vertical, estando parado en el pizarrón, mostraba que al ser de sección angosta, las alturas serían muy grandes, logrando convencer a todos de esta idea.

Análisis. En este punto, acompañando esta posible reestructuración del enunciado, se puede observar que las conclusiones abordadas en la primer actividad cuando se trabajó con recipientes cilíndricos, les provee del sustento para afirmar que sucedería si ocurriera lo supuesto, y asegurando de que se trataría de una recta con una pendiente pronunciada, permitiendo suponer que se está pensando en esta razón de cambio, donde la diferencia de altura del líquido es considerablemente mayor a la unidad de tiempo.

Se presenta entonces, para terminar la clase, la tercera tarea: "Cuadrando números".

Tarea 3. Las siguientes tablas muestran los valores de la altura del cuerpo del líquido en tres recipientes llenados a flujo constante:

Recipiente E	
Tiempo (s)	**Altura (cm)**
2	**1.7**
4	**3.2**
6	**4.6**
8	**5.7**
10	**6.5**

Recipiente F	
Tiempo (s)	**Altura (cm)**
1	**1.1**
3	**3.4**
5	**6.3**
7	**9.8**
9	**13.7**

Recipiente G	
Tiempo (s)	**Altura (cm)**
3	**2.7**
6	**5.4**
9	**8.1**
12	**10.8**
15	**13.5**

¿Cuál recipiente corresponde al llenado de un cilindro?, ¿Por qué?

Nadie presentó problemas para decir que el recipiente G era un cilindro, pero las justificaciones fueron diferentes. Al empezar a resolver, algunos preguntaron si podían graficar los datos de la tabla, y se les solicitó que trataran de evitarlo si podían. Esto, con el fin de analizar las variaciones en la representación tabular y no en la gráfica, para poder analizar ambas y favorecer la aparición de la razón de cambio.

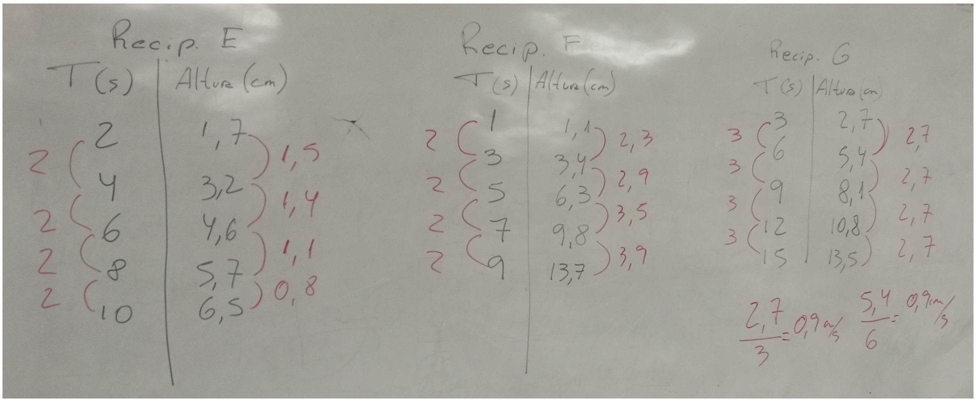


Figura 4. Argumentaciones de las diferencias en el pizarrón, tarea 3.

Casi todos calcularon las diferencias entre los valores presentados de la tabla. Muy pocos realizaron el cociente entre la altura y el tiempo, pero al ver que uno le colocó las unidades, otros dijeron que eso entonces era la velocidad, porque estaba en cm/s, y como las diferencias siempre se mantenían constantes, ese tenía que ser el cilindro y, además, para que el gráfico fuese una recta. En este punto, un estudiante quiso poner un contraejemplo a lo que se venía argumentando, respecto de que si la diferencia fuese 3 – 2,7 propuso: "*Si en vez de tener el dato de que a los 15 la altura es de 13,5, ¿me dicen que a los 14 la altura es de 12,6? La constante ya no es 3, pero sigue siendo un cilindro*". Entonces discutieron que en realidad la constante era 0,9, que es el resultado del cociente.

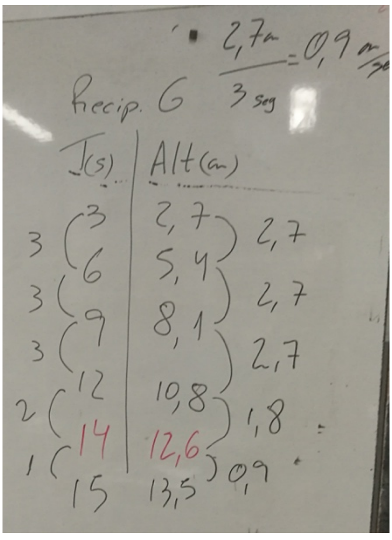


Figura 5. Argumentaciones de las diferencias en el pizarrón, tarea 3.

Análisis. Este supuesto, proporcionado por un estudiante, propicia el debate y permite robustecer la idea de razón de cambio, idea que ya se veía firme al contrastar entre las tres tablas propuestas, pero poder concluir que se puede intercalar valores, por fuera de ese patrón que se venía observando, da indicios de las construcciones que están desarrollando los alumnos internamente y explicitan en las discusiones.

5. Reflexión teórica sobre el análisis de datos

Los datos que arroja la experiencia serán explicados a la luz de los enfoques teóricos asumidos. En primer término, diremos que según Cantoral (2013), no siempre se encuentra al alumnado en situación de aprendizaje de ahí que se produzca intencionalmente el conflicto cognitivo para recrear la situación, proponiendo una tarea situada que enfrente al estudiante con un escenario en el que debe poner en juego su conocimiento, aunque, sobre todo, que lo requiere para encarar un desequilibrio cognitivo que le exija usar el conocimiento en la tarea. La elaboración de la tarea la realizó el equipo de PIDPDM como un medio situado en el que prácticas variacionales pueden entrar en juego, pero la elección de su implementación obedeció con fines del empoderamiento. Como respuesta a una solicitud personal, se le propuso una situación de aprendizaje a Francisco para su análisis y revisión, sin embargo, con su experiencia y expectativas, decidió ponerla en escena y modificarla parcialmente por el mismo. Esta señal es una primera muestra de empoderamiento.

El reto mayor con los diseños, desde el punto del empoderamiento docente, es justamente su adecuada articulación entre las intenciones del profesor con las pretensiones de la situación de aprendizaje. Es decir, que pudieran quedar bajo el control del docente, desde el punto de vista de la aspiración didáctica, motivar y aprender vía la enseñanza. En este caso, se trataba de discutir el tema función para terminarlo con su derivada, pero el docente sabía, por experiencia propia, que el tema resultaba poco atractivo o, en definitiva, “aburrido” para los estudiantes en virtud de su carga simbólica y representacional clásica (algebraica, numérica y gráfica), de manera que un diseño alterno, cercano a las experiencias de vida cotidiana de las y los estudiantes, podría ser una buena oportunidad para intentarlo, en lugar de continuar con su anterior estrategia que era meramente explicativa de la técnica, y un conjunto de actividades de aplicación, que no siempre le garantizaba que el alumnado lograse alcanzar el entendimiento del concepto subyacente en esa técnica.

Así, *motu propio*, el docente pide a su colaborador, un diseño sobre el tema (objeto matemático) función y derivada. Lo evalúa, aplica y progresivamente descubre que el alumnado pone en funcionamiento elementos del pensamiento matemático de naturaleza variacional que eran sorpresivos para el propio docente, pero no sólo eso, sino que le declaran explícitamente que les hubiese gustado estudiar de este modo en su paso por la escuela. Tal situación de sorpresa lleva a Francisco a construir un diálogo informado con el PIDPDM, para saber si el éxito de la aplicación es reproducible o contingente.

El episodio "rectas llenando vasos", deja ver con toda claridad que el sentido de la representación favorece la emergencia de la variación en forma verbal y gestual, con apoyo en datos numéricos – medidas propiamente dicho. Progresivamente se trata la comparación de estados, la secuenciación de procesos para dar lugar a una predicción. Evoluciona también de lo factual a lo procedimental cuando se discute el tema de la pendiente de las rectas representativas. En los debates sobre la predicción final (misma altura o mismo volumen) se dejan ver "desajustes" en las interpretaciones de las representaciones, pero es la práctica de llenado, hipotética o realista, la que les permite a las y los estudiantes, en el curso de debates fundados decidir una ruta de solución. El profesor muestra una evolución en su propio proceso de empoderamiento, pues decide dosificar sus intervenciones con el fin de hacer emerger construcciones propias de los estudiantes (ponerse en los pies del otro). Decide participar o se abstiene de ello, deja el control a la situación.

En los episodios siguientes "curvas llenando matraces y copas" aparece de parte de los alumnos la necesidad de la variación sucesiva, esta crece, pero cada vez crece más; mientras que esta otra, crece también, pero crece cada vez menos. Este logro da cuenta de que el conflicto planteado fue superado al nivel procedimental, sin saberlo, la gestión áulica del docente permite la aparición de un teorema, primera derivada positiva y segunda derivada positiva, se trata de una curva cóncava hacia arriba. Recíprocamente, primera derivada positiva, con segunda derivada negativa, se trata de una curva cóncava hacia abajo. Sin embargo, el verdadero resultado es, juntamente con los anteriores, que las dos curvas coinciden en su mínimo y en su máximo cuando el volumen del recipiente es el mismo, esto pone en evidencia que la transversalidad del hallazgo ha superado a la variable funcional puesta en juego (altura o volumen). Su temporización (distribución en el tiempo de medidas intermedias) estableció un nuevo sistema de referencia, que no sería el plano cartesiano en sí, sino un sistema móvil colocado sobre la propia gráfica, pues la variación de la variación es un constructo de segundo orden.

En el episodio último, "cuadrando números", se busca confirmar el proceso reversible – condición de certeza del aprendizaje y de los principios del arribo de la etapa simbólica. Las respuestas de los estudiantes y el control de la situación del docente muestran que las dinámicas del empoderamiento no sólo permitieron a Francisco una gestión diferente de la clase, sino que propiciaron el aprendizaje a la vez que fortalecieron las habilidades socioemocionales. Pero lo más relevante fue, en nuestra opinión, que la relación al conocimiento ha sido cambiada por las acciones reflexivas del profesor en el marco de la situación de aprendizaje puesta en escena. Su propio conocimiento se fortalece con las reflexiones en los debates de sus estudiantes

6. Conclusiones

Este artículo pone en evidencia el papel del empoderamiento docente en la ganancia cognitiva y en la inclusión social, con base en resultados experimentales de una intervención educativa sustentada en prácticas socioculturales que favorecen un aprendizaje significativo de las matemáticas, siempre con el recurso de los conflictos cognitivos y una secuencia de tareas.

Asimismo, la investigación se basó en la teoría socioepistemológica sobre el pensamiento variacional. El foco del diseño no estuvo en el objeto matemático per se, sino en el sistema de prácticas socialmente compartidas. La configuración experimental ofreció la oportunidad de abordar el empoderamiento docente y el desarrollo del pensamiento variacional por parte de los estudiantes, desde un paradigma pragmático de las matemáticas y de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Esto brinda un nuevo entendimiento de la relación entre la práctica docente y la actividad matemática de los estudiantes.[2]

Se planteó un estudio de empoderamiento docente a partir de la intervención realizada libremente por un profesor de nivel secundario en Argentina, al trabajar en una clase de sexto año de una escuela técnica. En esta experiencia, se pusieron de manifiesto las etapas de una construcción social del conocimiento matemático de parte de las y los estudiantes ante una situación de aprendizaje. Al momento de responder a un conjunto secuenciado de tres tareas, con una serie de actividades que se guiaban en el marco de una situación de aprendizaje basada en la socioepistemología, se nota la presencia de una evolución pragmática, en un contexto situacional del estudiante, el llenado de recipientes de forma diversa (lados rectos verticales u oblicuos). La literatura reporta una confusión de los estudiantes entre la forma del recipiente y la gráfica producida de la función *altura* versus *tiempo*. Sin embargo, en este diseño esto no ocurre por dos razones principales:

- Razón 1. El proceso de empoderamiento que vive el profesor en cuestión, con acompañamiento colaborativo.
- Razón 2. El diseño basado en prácticas, que descentraliza al objeto matemático *función derivada*.

De esta manera, el discurso del profesor en el aula se construye y reconstruye en el contexto del diseño de la situación de aprendizaje (articulación adecuada entre la razón 1 y la razón 2). Más específicamente, el profesor abandona un discurso centrado en objetos, para aceptar otro ubicado en prácticas que, a su

[2] Agradecemos a las/los revisores de esta propuesta por alcanzar una mirada sintética del artículo con tanta nitidez conceptual.

vez, él mismo vivió en las sesiones presenciales del programa PNAM. Esto exige de su parte una muestra explícita del empoderamiento, al construir sus intervenciones didácticas, recontextualizando y eligiendo apropiadas relaciones entre gráfica, número y sentido contextual. Este hecho ha sido documentado por diferentes autores como Reyes-Gasperini (2016), Freire y Shor (1986), Santana, Serrazina y Nunes (2018) y Bernstein (2000). Específicamente, Bernstein (2000) señala al respecto:

> But I want to argue that the crucial space which creates the specialization of the category – in this case the discourse – is not internal to that discourse but is the space between that discourse and another. In other words, A can only be A if it can effectively insulate itself from B. In this sense, there is no A if there is no relationship between A and something else. The meaning of A is only understandable in relation to other categories in the set; in fact, to all the categories in the set. In other words, it is the insulation between the categories of discourse which maintains the principles of their social division of labour. In other words, it is silence which carries the message of power; it is the full stop between one category of discourse and another; it is the dislocation in the potential flow of discourse which is crucial to the specialisation of any category. (Bernstein, 2000, p. 6)

El discurso del profesor ante la situación variacional trata de alturas, pero es trasladado hacia otro relativo más complejo sobre el volumen, es decir, su especialización se alcanza cuando se crea un espacio entre los dos discursos. Digamos que el discurso sobre alturas será justo eso en la medida en que se distinga del discurso sobre el volumen.

Seguramente la capacidad de ponerse en los "zapatos del otro" ya habían sido desarrollados por el profesor en su vida misma, o en su vida como docente. Aunado a ello, el diseño basado en empoderamiento le permitió su utilización legítima en las clases habituales. De ahí que sus alumnos dijeran expresiones motivacionales hacia él mismo, por ejemplo, como Francisco relata él en el diálogo informado:

> Este mismo alumno es un alumno que es repetidor, y exalumno mío del año anterior, antes de volver a su lugar, me preguntó en confidencia: "*¿Por qué el año pasado, no explique así lo de límites y del infinito?*". No pude hacer otra cosa que sonreír y darle las gracias.

Por otro lado, el empoderamiento docente, en tanto proceso, favorece el aprendizaje del alumnado. En este sentido, su logro se materializa en dos planos, por un lado, en el proceso de formación continua del profesorado y por otro, en el proceso de aprendizaje basada en la enseñanza basada en prácticas socialmente compartidas (Reyes-Gasperini, 2016).

Referencias bibliográficas

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identity: Theory, research, critique*. Oxford: Rowman & Littlefield Publishers.

Caballero-Pérez, M., & Moreno-Durazo, A. (2017). Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. In L. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1066–1074). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. (2019). *Sobre el origen del p*. La trilogía: variación sucesiva, hipótesis abductiva y pequeña variación*. Manuscrito enviado para publicación.

Freire, P., & Shor, I. (1986). *Miedo y osadía: Lo cotidiano del profesor*. Madrid: Siglo XXI Editores.

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. (2018). *Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje en Matemáticas*. Buenos Aires: Secretaria de Innovación y Calidad Educativa.

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. (2019). *Plan Nacional Aprender Matemática: Predecir*. Buenos Aires: Secretaría de Innovación y Calidad Educativa.

Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas. (2016). *Programa interdisciplinario para el desarrollo profesional docente en matemáticas*. http://www.pidpdm.mx

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y socioepistemología: Un estudio sobre la transformación educativa en matemáticas.* Barcelona: Gedisa.

Santana, E., Serrazina, L., & Nunes, C. (2018). Contribuições de um processo formativo para o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *22*(1), 11–38.

Soto, D., & Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión: Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1525–1544.