ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica

e la sua didattica

Anno 27, n. 2, 2019

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 2 - Ottobre 2019

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica

e la sua didattica

Anno 27, n. 2, 2019

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 2 - Ottobre 2019

In copertina:
Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La matematica e la sua didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).
Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.
Logo dell'Associazione "Incontri con la matematica" fondata nel 2010 con sede in Bologna.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

Gli articoli inviati alla rivista vengono sottoposti anonimi al giudizio di due esperti conosciuti solo al direttore; in caso di valutazioni differenti, vengono mandati a un terzo esperto.

Los artículos presentados a la revista son enviados anónimos a dos árbitros expertos conocidos sólo al director; en caso de diferentes evaluaciones, se envían a un tercer arbitro experto.

The articles submitted to the journal are anonymously reviewed by two experts known only by the editor-in-chief; in case of different evaluations they will be sent to a third expert.

Redazione: Maura Iori (maura@iori-maura.191.it)

Direttore responsabile: Bruno D'Amore
Proprietà Direzione Amministrazione Redazione, presso Associazione Incontri con la Matematica

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993
ISSN 1120-9968

La rivista *La matematica e la sua didattica* è semestrale ed esce nei mesi di aprile e ottobre.

La rivista è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

La matematica e la sua didattica

NRD Università di Bologna, Italia e Associazione Incontri con la Matematica, Bologna, Italia.

Indice

Concordancias y complementariedades de las teorías socioculturales en educación matemática[1]

Concordances and complementarities of sociocultural theories in mathematics education[1]

Juan D. Godino
Universidad de Granada, Granada, Spain

Abstract. *Several theories used in mathematics education address the problems of teaching and learning from a sociocultural perspective. Such is the case of ethnomathematics, the anthropological theory, and socioepistemology, among others. These theories share some ontological and epistemological principles about mathematics, considering it as a cultural product that results from people's activity when faced with certain types of problems. Furthermore, they assume the relative character of mathematics with respect to the specific contexts in which it emerges, in relation to the modes of interaction that condition it, and in relation to languages, signs and artifacts available in every circumstance (cultural anthropology). The objective of this article is to analyze the scope of the selected theories and the possibility of advancing in the construction of a hybrid theoretical system that simplifies and organizes the conceptual and methodological tools that are applied in this type of research. Furthermore, the characteristics of the ontosemiotic approach to mathematical knowledge and instruction are presented. This approach, which aims to advance in the construction of the aforementioned inclusive theoretical system, is also used to identify concordances and complementarities between the four theoretical models.*

Keywords: epistemology, sociocultural studies, ethnomathematics, anthropological theory, socioepistemology, ontosemiotic approach.

Sunto. *Diverse teorie usate in didattica della matematica affrontano i problemi dell'insegnamento e dell'apprendimento da una prospettiva socioculturale. Tra le altre, l'etnomatematica, la teoria antropologica e la socioepistemologia. Tali teorie condividono alcuni principi ontologici ed epistemologici sulla matematica, considerandola come un prodotto culturale che deriva dall'attività delle persone di fronte a determinati tipi di problemi. Inoltre, queste teorie assumono il carattere relativo della matematica rispetto ai contesti specifici dai quali essa emerge, in relazione ai modi di interazione che la condizionano, ai linguaggi, ai segni e agli artefatti disponibili in ogni circostanza (antropologia culturale). L'obiettivo di questo lavoro è quello di analizzare il campo di applicazione delle teorie selezionate e la*

[1] Versión revisada de la conferencia plenaria impartida en la RELME 31, Lima, Perú (2017) con el título: "Articulación de Teorías Socioculturales en Educación Matemática Desde la Perspectiva del Enfoque Ontosemiótico".

possibilità di compiere progressi nella costruzione di un sistema teorico ibrido che semplifichi e organizzi gli strumenti concettuali e metodologici che si applicano in questo tipo di ricerca. Inoltre, vengono presentate le caratteristiche dell'approccio ontosemiotico alla conoscenza e all'istruzione matematica. Tale approccio, che cerca di compiere progressi nella costruzione del menzionato sistema teorico inclusivo, viene anche usato per identificare concordanze e complementarità tra i quattro modelli teorici.

Parole chiave: epistemologia, studi socioculturali, etnomatematica, teoria antropologica, socioepistemologia, approccio ontosemiotico.

Resumen. *Diversas teorías usadas en educación matemática abordan los problemas de enseñanza y aprendizaje desde una perspectiva sociocultural, entre otras, la etnomatemática, la teoría antropológica y la socioepistemología. Estas teorías comparten principios ontológicos y epistemológicos sobre las matemáticas, considerándolas como un producto cultural resultado de la actividad de las personas ante determinados tipos de problemas. Así mismo, aceptan el carácter relativo de las matemáticas respecto de los contextos específicos en los cuales emergen, y que son condicionadas por los modos de interacción, el lenguaje, los signos y artefactos disponibles en cada circunstancia (antropología cultural). El objetivo de este trabajo es analizar el ámbito de aplicación de las teorías seleccionadas y la posibilidad de avanzar en la construcción de un sistema teórico híbrido que simplifique y organice las herramientas conceptuales y metodológicas que se aplican en este tipo de investigaciones. Se presentan, además, las características del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, que pretende avanzar en la construcción del mencionado sistema teórico inclusivo, y se usa para identificar concordancias y complementariedades entre los cuatro modelos teóricos.*

Palabras clave: epistemología, estudios socioculturales, etnomatemática, teoría antropológica, socioepistemología, enfoque ontosemiótico.

1. Introducción

La complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, los diversos factores que se deben tener en cuenta y la influencia de los diversos contextos culturales, justifican que se hayan generado diversas teorías para tratar de describir, explicar y diseñar dichos procesos. No obstante, la profusión de teorías genera dificultades de comunicación y de capitalización de los conocimientos. Esta es la razón por la que la articulación de marcos teóricos (*networking theories*) está recibiendo una atención particular por diversos autores (Bikner-Ahsbahs & Prediger, 2014; Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008), quienes consideran que la coexistencia de diversas teorías para explicar los fenómenos de una disciplina como la didáctica de las matemáticas puede ser hasta cierto punto inevitable y enriquecedora, pero al mismo tiempo puede constituir una rémora para su consolidación como un campo científico. Prediger et al. (2008) describen diferentes estrategias y métodos para articular teorías, que van desde ignorarse entre sí a la unificación global. Algunas estrategias intermedias sugeridas por estos autores serían hacer comprensibles entre sí las teorías, comparar y contrastar diferentes aproximaciones, coordinar y combinar perspectivas, para, finalmente, lograr una integración y síntesis local.

En este trabajo iniciamos el estudio de varias teorías usadas en educación matemática que abordan las cuestiones sobre la naturaleza del conocimiento matemático y los procesos de su aprendizaje desde una aproximación sociocultural. En particular, consideraremos la etnomatemática (ETM) (D'Ambrosio, 1985; Barton, 1996; Bishop, 1994), la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1992, 1999) y la teoría socioepistemológica en matemática educativa (TSEM) (Cantoral & Farfán, 2003; Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014). El estudio comparativo se realiza desde la perspectiva ofrecida por el sistema teórico modular e inclusivo del enfoque ontosemiótico (Godino, 2002; Godino, Batanero, & Font, 2007).

Comenzamos con una primera reflexión sobre la necesidad y utilidad de las teorías como herramientas imprescindibles para la investigación científica, como ayuda inestimable para comprender la práctica de la enseñanza y actuar sobre la misma de manera fundamentada. Seguidamente mostramos la complejidad de los procesos de estudio matemático, indicando los diversos focos, dimensiones, facetas y niveles que se deben tener en cuenta para poder realizar un análisis didáctico integral de dichos procesos. La finalidad de esta sección es proporcionar elementos que permitan dilucidar los ámbitos de aplicación de las teorías y la necesidad de avanzar en la construcción de un sistema teórico que tenga en cuenta, de manera modular e inclusiva, la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En la Sección 4 presentamos una síntesis de los rasgos característicos de las tres teorías en discusión, mientras que en la Sección 5 hacemos una síntesis del enfoque ontosemiótico. En la Sección 6 analizamos las concordancias y complementariedades entre las cuatro teorías. En la última sección se incluye algunas reflexiones finales, mencionando aspectos sociales relevantes relacionados con la articulación de teorías.

2. Necesidad y utilidad de las teorías

2.1. ¿Qué es una teoría? Componentes y ámbito de aplicación

Parece necesario, como un primer paso, explicitar qué se entiende por una teoría. Para Radford (2008, p. 320) una teoría se puede ver como un modo de producir comprensiones y modos de acción basado en:

- Un sistema, P, de *principios básicos*, que incluyen visiones implícitas y enunciados explícitos que trazan la frontera de lo que será el universo del discurso y la perspectiva de investigación adoptada.

- Una *metodología*, M, que incluye las técnicas de recogida de datos y su interpretación apoyada por P.
- Un conjunto, Q, de *cuestiones paradigmáticas* de investigación (patrones o esquemas que generan cuestiones específicas a medida que surgen nuevas interpretaciones o se profundizan, extienden o modifican los principios).

Como resultado de aplicar los principios y los métodos a las cuestiones de investigación se obtienen unos *resultados*, en la forma de descripciones y explicaciones, así como recursos y modos de acción justificados, los cuales forman parte de la teoría entendida en un sentido ampliado. Las teorías se usan como herramientas para describir, explicar y prescribir determinados modos de intervención en la práctica de la enseñanza.

Las teorías pueden diferir mucho por los tipos de cuestiones que abordan, los principios y nociones primitivas que adoptan, y los métodos que aplican. Las teorías pueden abordar todos o algunos de los componentes de las fases, dimensiones, facetas y niveles de análisis descritos en la Figura 1. Por tanto, pueden diferir notablemente en su ámbito de aplicación. También es usual hablar de teorías externas e internas a la propia disciplina. Las primeras son aplicaciones al estudio de las matemáticas de teorías provenientes del campo de la psicología, sociología, o de otras disciplinas; las segundas son teorías locales, o de nivel intermedio, generadas dentro del campo de la educación matemática, aunque frecuentemente apoyadas también en teorías externas (por ejemplo: constructivismo, semiótica cognitiva o antropología cultural).

2.2. El problema de la multiplicidad de teorías

En principio, cualquier teoría puede producir conocimientos valiosos que ayudan a comprender el campo y actuar sobre el mismo de manera fundamentada. Pero las diversas teorías, pueden ser redundantes, contradictorias, parciales, o más o menos eficaces para realizar el trabajo pretendido. La clarificación, comparación y posible articulación de teorías debe orientarse, por tanto, a la elaboración de un sistema de herramientas conceptuales y metodológicas óptimo, que potencie la investigación en el campo. Este sistema puede incluir herramientas conceptuales provenientes de otras disciplinas, tales como la epistemología, psicología, sociología, con las adaptaciones e interpretaciones que los problemas específicos del estudio de las matemáticas puedan requerir, o bien teorías desarrolladas en el seno de la educación matemática. En nuestro caso asumimos que tal articulación de teorías se puede hacer mediante el análisis racional de los elementos constituyentes de las teorías y la elaboración de nuevas herramientas cuando la mera amalgama de las existentes no se considera posible o pertinente.

En este trabajo hemos seleccionado tres teorías para su comparación y posible articulación, las cuales comparten ciertos presupuestos provenientes de teorías externas más generales, como son las teorías socioculturales sobre el conocimiento y el aprendizaje. Trataremos de responder a las siguientes cuestiones para la etnomatemática (ETM), la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) y la socioepistemología (TSEM):

- ¿Cómo plantean las teorías seleccionadas los problemas ontológicos, epistemológicos, cognitivos e instruccionales propios de la educación matemática?
- ¿Han desarrollado estas teorías herramientas conceptuales y metodológicas suficientes para abordar las cuestiones que se plantean de manera eficiente?
- ¿En qué medida se pueden integrar estas teorías en el sistema teórico EOS?

3. Complejidad de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

La realización de un análisis didáctico integral de los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático, que sirva de fundamento para lograr intervenciones didácticas idóneas y fundamentadas, requiere tener en cuenta las distintas fases propias de un diseño didáctico, las diversas dimensiones, facetas y niveles de análisis (Figura 1). Como se indica en Godino, Rivas, Arteaga, Lasa y Wilhelmi (2014), el diseño didáctico, o ingeniería didáctica en sentido generalizado, incluye las *fases* de análisis preliminar, diseño, implementación y análisis retrospectivo. En las distintas fases están involucradas tres *dimensiones*, las cuales se refieren al contenido matemático en sí mismo, al contenido didáctico propiamente dicho y la dimensión meta didáctica (análisis de normas, meta-normas y valoración de la idoneidad del proceso). Las dimensiones didáctica y meta-didáctica deben tener en cuenta los conocimientos especializados desarrollados en cada una de las seis *facetas* siguientes:

- *Epistémica:* significados institucionales pretendidos e implementados para el contenido matemático, así como los problemas, procedimientos, conceptos, proposiciones, lenguajes y argumentos puestos en juego en cada significado.
- *Ecológica:* relaciones del tema con otros tópicos y con los contextos sociales, políticos, económicos que soportan y condicionan la enseñanza y aprendizaje.
- *Cognitiva:* niveles de desarrollo y comprensión de los estudiantes, estrategias, dificultades y errores con relación al contenido pretendido.
- *Afectiva:* actitudes, emociones, motivaciones y creencias de los estudiantes con relación al contenido y el proceso de estudio.
- *Interaccional:* organización del discurso en la clase y las interacciones entre el profesor y los estudiantes dirigidas a resolver las dificultades de los estudiantes y negociación de significados.

- *Mediacional:* recursos didácticos y tecnológicos disponibles para el estudio y posibles maneras de usar y distribuir estos recursos en el tiempo.

El análisis de las facetas, además de las dimensiones, debe realizarse atendiendo a los problemas, prácticas, objetos y procesos implicados (tanto de índole matemática como didáctica), implicando unidades y niveles de análisis específicos.

Un marco teórico que permita abordar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debería incluir modularmente herramientas pertinentes para abordar las cuestiones que se plantean en cada uno de los componentes de las fases, dimensiones, facetas y niveles de análisis mencionados en la Figura 1.

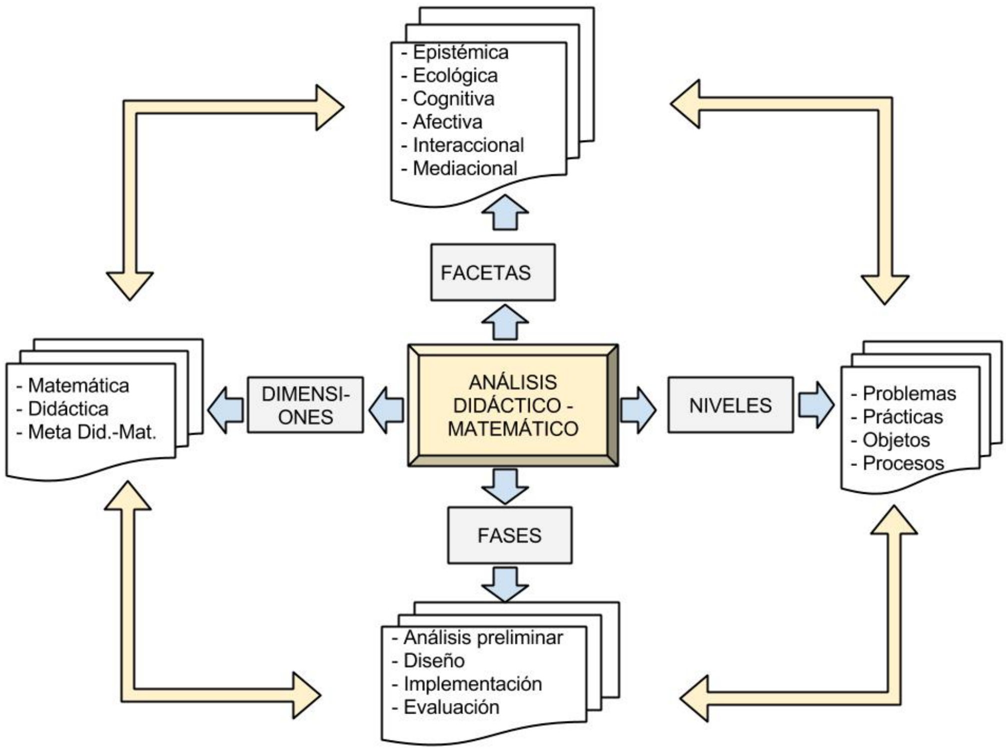


Figura 1. Focos de atención del análisis didáctico-matemático integral.

4. Teorías socioculturales en educación matemática

En esta sección presentaremos una síntesis de las principales características de tres teorías usadas en educación matemática. Trataremos de identificar las cuestiones paradigmáticas que abordan, los supuestos que adoptan, las herramientas conceptuales y metodológicas introducidas, así como su ámbito de aplicación.

4.1. El programa etnomatemático

Barton (1996) elabora la siguiente definición para la etnomatemática tras su análisis de los trabajos de D'Ambrosio, Gerdes y Ascher:

> Etnomatemática es un programa de investigación sobre la manera en que los grupos culturales comprenden, articulan y usan los conceptos y prácticas que nosotros describimos como matemáticas, tanto si el grupo cultural tiene un concepto de matemáticas como si no. (Barton, 1996, p. 214)

El programa de investigación y desarrollo de la etnomatemática no queda limitado al estudio de las prácticas matemáticas de los grupos étnicos (matemáticas indígenas) o las implicadas en actividades de la vida cotidiana y trabajos artesanales. Barton (1996) también incluye dentro del programa etnomatemático estudios internos a la matemática, tanto actuales (uso de estadística bayesiana en las estadísticas deportivas) como históricos (prácticas matemáticas y concepciones de los hindúes y griegos).

Vithal y Skovsmose (1997) describen cuatro facetas o campos de estudio de la etnomatemática:

1. *Historia de la matemática*. Se critica la visión tradicional de la historia de la matemática por ignorar, devaluar, distorsionar o marginar las contribuciones de otras culturas no europeas al cuerpo de conocimiento referido como matemáticas occidentales.
2. *Antropología cultural matemática*. Análisis de las matemáticas de culturas tradicionales, pueblos indígenas que pueden haber sido colonizados, pero continúan con sus prácticas matemáticas originales. Se han explorado estas prácticas en relación con temas como sistemas numéricos, simbolismo y lenguaje gestual, juegos y rompecabezas, geometría, espacio, formas, patrones, simetría, arte y arquitectura, tiempo, dinero, redes, grafos, dibujos en la arena, relaciones de parentesco y artefactos.
3. *Matemáticas en la vida cotidiana*. Análisis de las matemáticas usadas por diferentes grupos en entornos de la vida diaria mostrando el conocimiento matemático que se genera en una amplia variedad de contextos, tanto por adultos como por niños.
4. *Relaciones entre etnomatemática y educación matemática*. Se estudian las conexiones (o falta de ellas) entre las matemáticas encontradas en los contextos de la vida diaria y los correspondientes al sistema de la escuela formal.

Por su parte, Bishop se plantea la siguiente cuestión epistemológica fundamental que subyace a toda la investigación etnomatemática:

> ¿Existen una única matemática que aparece en diferentes manifestaciones y simbolizaciones, o hay diferentes matemáticas que se practican y tienen ciertas similitudes? Desde una perspectiva educativa, sin embargo, las preocupaciones se centran generalmente en las implicaciones de las diferencias entre el

> conocimiento matemático de los diferentes grupos culturales. (Bishop, 1994, p. 15)

Una tesis básica de la etnomatemática es que la educación matemática se puede mejorar considerando el trasfondo cultural de los estudiantes al permitir comprender sus logros, actitudes y motivaciones. "El concepto de *background* se puede comprender como la red de relaciones y significados socialmente construida que son el resultado de la pasada historia vivida por el estudiante" (Skovsmose, 1994, p. 179).

Diversos autores resaltan también como campo de indagación de la etnomatemática el estudio de cuestiones de índole política (relaciones de poder, dependencia, subordinación) que conlleva el desarrollo y estudio de la matemática como disciplina académica. Se deben reconocer las relaciones de poder "naturalizadas" entre formaciones epistemológicas ligadas a grupos sociales/étnicos/culturales (Knijnik, 2012). La matemática europea se ha impuesto como la única forma de matemática existente y es la que se ha introducido en los sistemas escolares de todo el mundo como única alternativa. Se hace, de manera implícita, una crítica a la enseñanza de la matemática en las escuelas por estar al servicio de una sociedad tecnificada y mercantilizada. Otro mundo, menos mercantilizado, es posible y deseable; un motor para el cambio está en la educación, en la escuela, en el currículo, en las matemáticas que se enseñan y aprenden.

Algunos autores han asumido como fundamentación filosófica de la etnomatemática nociones claves de la filosofía de Wittgenstein tales como, juego de lenguaje, formas de vida, parecidos de familia, gramática, reglas (Vilela, 2010; Knijnik, 2012). Estas nociones apoyan y justifican la visión socio-antropológica de las matemáticas, propia de la etnomatemática, según la cual las prácticas sociales de otras culturas o grupos étnicos ante determinadas situaciones o actividades son también prácticas matemáticas.

Como vemos, los etnomatemáticos se han esforzado en decir lo que es la etnomatemática, pero no en describir lo puede ser la práctica matemática en sus diversas manifestaciones, tanto informales como formales, y los objetos resultantes de dicha actividad. Por tanto, en cierto modo tienen dificultades para describir las complejas relaciones entre la etnomatemática y la matemática.

Hay que reconocer que las diferentes formaciones epistemológicas a que dan lugar las diferentes culturas, comunidades de prácticas, los diferentes sistemas de prácticas y configuraciones de objetos matemáticos desarrollados no son comparables desde el punto de vista de su eficacia e idoneidad para resolver problemas. Esto es un hecho indiscutible: contar y calcular con los dedos, o contar y calcular con los números romanos es menos eficaz que contar con los sistemas de numeración posicionales. La matemática occidental ha permitido un desarrollo tecnológico muy superior a cualquier otra matemática.

4.2. Teoría antropológica de lo didáctico

La teoría antropológica en didáctica de las matemáticas (TAD) (Chevallard, 1992, 1999) aporta los elementos básicos de una epistemología de las matemáticas que entronca con las corrientes de tipo socioculturales. El punto de partida es considerar la actividad matemática, y la actividad de estudio de las matemáticas, en el conjunto de las actividades humanas y de las instituciones sociales. El saber matemático se construye como respuesta al estudio de cuestiones problemáticas, apareciendo, así como el resultado (o producto) de un proceso de estudio. La noción de estudio engloba las nociones de enseñanza y aprendizaje (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997) y permite analizar bajo un mismo prisma el trabajo que realiza el matemático investigador, el que realiza el profesor cuando enseña matemática o del alumno que las aprende en la escuela. El investigador plantea y estudia problemas con el objetivo de construir matemáticas nuevas que aporten una solución a dichos problemas; el profesor y sus alumnos estudian matemáticas conocidas que permitan aportar respuestas a cuestiones problemáticas consideradas importantes en determinadas instituciones de la sociedad.

En los comienzos de la TAD se introducen como nociones técnicas las de objeto, sujetos, instituciones y relaciones personales e institucionales a los objetos. Se considera que estos objetos existen porque hay “actividad”, es decir trabajo humano, del que todos los objetos son emergentes. En la actualidad la noción de praxeología sintetiza la concepción antropológica de la matemática sobre la que se apoya la TAD. Veamos la descripción que se hace en Chevallard (1999, pp. 224–229) de la noción de praxeología u organización matemática.

> Alrededor de un tipo de tareas, T, se encuentra así, en principio, una tripleta formada por una *técnica* (al menos), ô, por una tecnología de ô, θ, y por una teoría de θ, Θ. El total, indicado por [T/ô/θ/Θ], constituye una praxeología *puntual*, donde este último calificativo significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, T. Una tal praxeología – u *organización praxeológica* – está pues constituida por un bloque *práctico-técnico*, [T/ô], y por un bloque *tecnológico-teórico*, [θ/Θ]. El bloque [θ/Θ] se identifica habitualmente como *un saber*, mientras que el bloque [T/ô] constituye un *saber-hacer*. Por metonimia se designa corrientemente como “saber” la praxeología [T/ô/θ/Θ] *completa*, o incluso cualquier parte de ella. Pero esta manera de hablar estimula una *minoración del saber-hacer*, sobre todo en la producción y difusión de las praxeologías. (Chevallard, 1999, p. 229)

Dentro de este modelo, hacer matemáticas consiste en activar una organización matemática, es decir, resolver determinados tipos de problemas con determinados tipos de técnicas (el saber hacer), de manera inteligible, justificada y razonada (mediante el correspondiente saber). Este trabajo puede conducir a la construcción de nuevas organizaciones matemáticas o, simplemente, a la reproducción de organizaciones previamente construidas.

Enseñar y aprender matemáticas corresponde a la actividad de reconstruir organizaciones matemáticas para poderlas utilizar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones.

Dado que las técnicas, tecnologías y teorías que se ponen en juego para resolver un determinado tipo de tareas pueden ser diferentes según las instituciones y contextos de uso en que tienen lugar se deriva, por tanto, el reconocimiento del carácter relativo (antropológico) de los saberes y de los conocimientos puestos en juego. Como afirman Sierpinska y Lerman (1996):

> La ‘antropología del conocimiento' de Chevallard es una extensión de la epistemología, en el sentido de que, tradicionalmente, el objeto de estudio de la epistemología era la producción del conocimiento científico, mientras que la antropología del conocimiento se considera que se ocupa no solo de los mecanismos de la producción sino también con las prácticas relacionadas con el uso o aplicación del conocimiento científico, su enseñanza, y su transposición, esto es el tratamiento del conocimiento que hace que ciertos aspectos del mismo se adapten para funcionar en distintos tipos de instituciones (la escuela es una de ellas). (Sierpinska & Lerman, 1996, p. 856)

La enseñanza o tarea docente consiste básicamente en dirigir la reconstrucción de las praxeologías matemáticas (generando en particular las condiciones que mejor la permiten), mientras que el aprendizaje puede considerarse como el fruto de la reconstrucción, ya sea individual o en grupo. Así, el objetivo de un proceso de enseñanza-aprendizaje puede formularse en términos de los componentes de las organizaciones matemáticas que se quieren reconstruir: qué tipos de problemas hay que ser capaz de resolver, con qué tipos de técnicas, sobre la base de qué elementos descriptivos y justificativos, en qué marco teórico, etc.

La TAD propone un modelo del proceso de estudio de las matemáticas en términos de *momentos didácticos* (Chevallard, Bosch, & Gascón, 1997), los cuales constituye el esbozo de una teoría instruccional. Los tipos de momentos didácticos que se consideran esenciales en el proceso de estudio de una organización matemática son los siguientes: el momento del primer encuentro, el momento exploratorio, el momento del trabajo de la técnica, el momento tecnológico-teórico, el momento de la institucionalización y el momento de la evaluación. La noción de “recorrido de estudio e investigación” (REI) complementa la de momentos didácticos y propone introducir en la escuela una nueva epistemología que permita reemplazar el paradigma escolar del “inventario” de saberes por un paradigma del cuestionamiento del mundo, para dar sentido al estudio escolar de las matemáticas en su conjunto, transportando a la escuela una actividad de estudio más cercana al ámbito de la investigación.

Un REI se inicia con el estudio de una cuestión Q con fuerte poder generador, capaz de propiciar la aparición de numerosas cuestiones derivadas. Para poder dar respuesta a dichas cuestiones, se requiere la reconstrucción de un número considerable de herramientas matemáticas (técnicas, nociones, propiedades, etc.), que aparecen así como una consecuencia (y no como el origen) del estudio de las cuestiones. La propuesta de los REI pretende recuperar la relación genuina entre cuestiones y respuestas que está en el origen de la construcción del conocimiento científico en general y de la actividad matemática en particular.

4.3. Teoría socioepistemológica

La teoría socioepistemológica de la matemática educativa (TSME) "se ocupa específicamente del problema que plantea la *construcción social del conocimiento matemático* y el de su *difusión institucional*" (Cantoral, Reyes-Gasperini, & Montiel, 2014, p. 93). El origen de este marco teórico está en los trabajos de Cantoral, Farfán y otros investigadores del grupo de investigación de la sección de educación superior del departamento de matemática educativa del CINVESTAV (IPN, México). Se considera como una necesidad básica para la investigación en matemática educativa el adoptar una "aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza" (Cantoral & Farfán, 1998, p. 355).

La socioepistemología plantea el examen del conocimiento matemático considerándolo como social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión. Así mismo, se interesa por la discusión y elaboración de propuestas de enseñanza, problematizando de manera primaria el qué enseñar (la naturaleza de las propias matemáticas) "y no sólo, como ha sido habitual en las investigaciones educativas, sobre el cómo enseñar" (Cantoral & Farfán, 1998, p. 367).

La TSME asume que para estudiar fenómenos didácticos ligados a las matemáticas se precisa acudir a un examen minucioso del *saber* (sea popular, técnico o culto), a su *problematización*, concordando, por tanto, con las aproximaciones epistemológica a la didáctica de las matemáticas (Gascón, 1998).

> De este modo, la socioepistemología se caracteriza por ser una teoría *contextualizada*, *relativista*, *pragmática* y *funcional* que toma en cuenta la complejidad de la *naturaleza del saber* y su *funcionamiento cognitivo*, *didáctico*, *epistemológico* y *social* en la vida de los seres humanos mostrando los procesos de adaptabilidad, empíricamente comprobables, que nos permiten alcanzar algún grado de satisfacción en nuestros actos de conocer. (Cantoral et al., 2014, p. 98)

Principios de la TSME

La noción central es la de práctica social y la asunción de cuatro principios:

1. *Principio normativo de la práctica social*
   Las prácticas sociales son la base y orientación en los procesos de construcción del conocimiento, esto es, son las generadoras del conocimiento. "La *práctica social* no es lo que hace en sí el individuo o grupo (la *práctica ejecutada*), sino lo que les hace hacer lo que hacen, digamos que norma su accionar (la *orientación de la práctica*)" (Cantoral et al., 2014, p. 100). Como ejemplo de tales prácticas sociales se cita la de *predicción*: la imposibilidad de controlar el tiempo a voluntad, obliga a los grupos sociales a predecir, a anticipar los eventos con cierta racionalidad.
2. *Principio de la racionalidad contextualizada*
   La racionalidad con la que se actúa depende del contexto en el que el individuo se encuentre en un momento y lugar determinado. El escenario sociocultural en el que actúa el sujeto influye no sólo en las conductas, sino en la manera de actuar y de pensar de los miembros de la sociedad que lo habita.
3. *Principio del relativismo epistemológico*
   Como contraposición al absolutismo epistemológico que opta por la asunción de universales o verdad única, la TSEM concibe que el saber es, de hecho, una multitud de saberes con verdades relativas.

   > Por tanto, se entiende que la validez del saber es relativa al individuo y al grupo (contextual), y particularmente la socioepistemología, acepta que dentro de aquellas argumentaciones que sean "erradas" existe un pensamiento matemático que debe ser estudiado y considerado, para de allí, desarrollar el pensamiento matemático y construir conocimiento. (Cantoral et al., 2014, p. 102)
4. *Principio de resignificación progresiva* (*o apropiación situada*)
   Se asume que el conocimiento matemático adopta diversos significados según la historia, los contextos y las intenciones con las que se usa. Con la resignificación se construirán más argumentaciones, espacios de uso, procedimientos y todo aquello que rodea a un saber.

En síntesis:

> Una vez que un conocimiento es puesto en uso, es decir, se consolida como un saber, su validez será relativa a un entorno, ya que de ellos emergió su construcción y sus respectivas argumentaciones, lo cual dota a ese saber de un relativismo epistemológico. Así, a causa de la propia evolución y de su interacción con los diversos contextos, se resignificarán estos saberes enriqueciéndoles con variantes significativas (resignificación progresiva). (Cantoral et al., 2014, p. 103)

En la TSME se ha introducido la noción de "discurso matemático escolar" (dME) para designar una manera tradicional de entender la matemática escolar según la cual ésta se presenta como un sistema de razón estructurado lógicamente, como un lenguaje formal y estructuralista. Se supone que los estudiantes entienden ideas complejas sólo con mostrarles su definición formal en términos de conceptos precedentes y que comprenden un resultado al mostrarles su demostración y, que tal comprensión les permitirá, en situaciones futuras, aplicar las matemáticas a muy diversas situaciones de sus vidas. Un objetivo central de las investigaciones basadas en la TSME es proponer cambios en esta visión tradicional del dME hacia la perspectiva de "construcción social del conocimiento".

> En ese sentido lo importante no es enseñar los resultados de una actividad, sino comunicar a la actividad misma, y por ello, asumimos, los estudiantes deben aprender matematizando, organizando y reorganizando su realidad, realidad que no se restringe a la Física, Biología o Sociedad sino a toda aquella *realidad imaginable* o *razonable* para los propios estudiantes. (Cantoral et al., 2014, p. 105)

Con relación a este planteamiento nos parece necesario relacionar estos supuestos con los principios de la educación matemática realista (Freudenthal, 1968; Van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005). Por otra parte, la visión del dME que presenta la TSEM corresponde a visiones de la matemática y su enseñanza alejadas en el tiempo (época de introducción de la matemática moderna de los años 60 y 70), ajenas al constructivismo y socioconstructivismo que predomina en las orientaciones curriculares desde hace tiempo a nivel internacional (NCTM, 1989, 2000).

Otro problema que es necesario abordar en un análisis de la TSEM con vistas a su articulación con otros marcos teóricos es la "pérdida del objeto matemático", ante el énfasis que se pone en la "práctica social". De esta manera la matemática educativa se llena de actividad, de práctica, de contexto físico, biológico, social, lo cual es, sin duda, positivo, aunque no exclusivo de esta teoría. Pero al mismo tiempo se vacía de conceptos, proposiciones, procedimientos, lenguajes, y de los problemas de construcción del propio edificio matemático, que es la garantía de generalidad, eficacia, precisión en la resolución de los problemas matemáticos y extramatemáticos. Tan peligroso para la educación matemática puede ser reducir la matemática a reglas (conceptos, proposiciones, procedimientos), olvidando su origen y finalidad (enseñanza conceptualista), como reducir la matemática a práctica, sea individual o social, sin los objetos (reglas) que necesariamente le acompañan.

Otro problema epistemológico que amenaza a la TSEM es el relativismo radical asumido sobre el conocimiento matemático. Si bien es necesario, desde el punto de vista de la educación matemática, asumir que a cada objeto matemático se le debe reconocer una pluralidad de significados, dependiendo de los contextos de uso, esto no debe suponer el olvido de una característica esencial de dicho objeto: su carácter universal y necesario. Si nos ponemos de acuerdo en lo que significan los signos 2, + y 4, entonces, necesariamente se debe concluir que 2+2 = 4, en cualquier contexto, cultura o grupo social que se considere. La asunción de los presupuestos filosóficos sobre las matemáticas de Wittgenstein (1953), en particular su visión gramatical de los objetos matemáticos, permite superar el dilema del relativismo.

5. Enfoque ontosemiótico: Hacia un sistema teórico inclusivo

Godino y Batanero (1994) comenzaron a sentar las bases de un modelo ontológico, epistemológico y cognitivo relativo al conocimiento matemático sobre bases antropológicas y semióticas para tratar de dar respuesta a cuestiones fundamentales para la educación matemática, tales como: *¿Qué es un objeto matemático?*, o de manera equivalente, *¿Cuál es el significado de un objeto matemático (número, derivada, ...) en un contexto o marco institucional determinado? ¿Qué significa el objeto O para un sujeto en un momento y circunstancias dadas?*

Con un estilo que recuerda los trabajos de fundamentación axiomática de las matemáticas estos autores comenzaron definiendo las nociones primitivas de práctica matemática, institución, prácticas institucionales y personales, objeto institucional y personal, significado de un objeto institucional y personal, conocimiento y comprensión del objeto.

Desde sus comienzos el EOS ha estado motivado por la necesidad de clarificar y articular nociones de otros marcos teóricos, en particular nociones usadas en el seno de la didáctica francesa, y el deseo de hacer compatibles las concepciones epistemológicas y cognitivas. Para ello se parte de introducir la noción de práctica matemática en los siguientes términos: "Una práctica matemática es toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino & Batanero, 1994, p. 334).

Se asume que las prácticas (operativas y discursivas) pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución. Una institución está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas; el compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento. La noción de práctica matemática está en la base, tanto del modelo epistemológico como del cognitivo; pero ello no implica que el objeto matemático desaparezca de la escena, ya que en las prácticas intervienen objetos y éstos emergen de las prácticas en una relación dialéctica constituyente (Font, Godino, & Gallardo, 2013).

Estas nociones fueron complementadas en trabajos posteriores (Godino, 2002) con una tipología de objetos y procesos matemáticos primarios así como con una interpretación de la noción de función semiótica (relación triádica entre dos objetos, antecedente y consecuente, según un criterio o regla de correspondencia) que permite elaborar una noción operativa de conocimiento (significado, comprensión y competencia) (Figura 2).

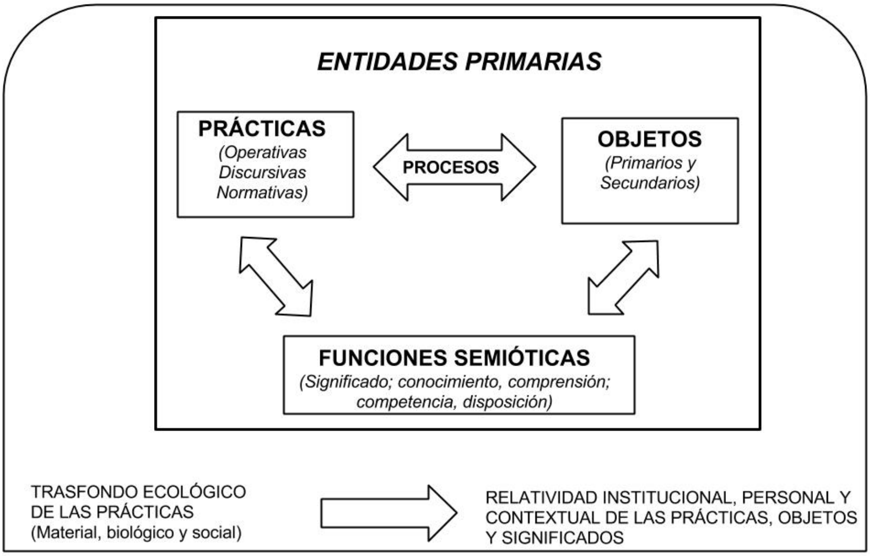


Figura 2. Entidades primarias de la ontología y epistemología EOS.

En el EOS se postula que los sistemas de prácticas y los objetos emergentes son relativos a los contextos de uso, a las instituciones en que tienen lugar las prácticas y a los sujetos implicados en las mismas (juegos de lenguaje y formas de vida, Wittgenstein, 1953). La descripción de los conocimientos de un sujeto individual sobre un objeto O se puede hacer de una manera global con la noción de "sistemas de prácticas personales". Esta noción queda concretada mediante la trama de funciones semióticas que el sujeto puede establecer en las que O se pone en juego como expresión o contenido (significante, significado). Así mismo, la comprensión y el conocimiento se conciben en su faceta dual personal-institucional, involucrando, por tanto, los sistemas de prácticas operativas, discursivas y normativas ante ciertos tipos de tareas problemáticas.

El aprendizaje de un objeto O por un sujeto se interpreta como la apropiación de los significados institucionales de O por parte del sujeto; se produce mediante la negociación, el diálogo y acoplamiento progresivo de significados.

En el EOS la noción de significado y sentido dejan de ser entidades etéreas y misteriosas. El significado de un objeto matemático es el contenido de cualquier función semiótica y, por tanto, según el acto comunicativo correspondiente, puede ser un objeto ostensivo o no ostensivo, extensivo o intensivo, personal o institucional; puede referirse a un sistema de prácticas, o a un componente (situación-problema, una notación, un concepto, etc.). El sentido se puede interpretar como un significado parcial, esto es, se refiere a los subsistemas de prácticas relativos a marcos o contextos de uso determinados.

En trabajos más recientes el modelo ontosemiótico del conocimiento matemático se ha ampliado con otros supuestos y herramientas teóricas, en particular la noción de configuración y trayectoria didáctica (Godino, Contreras, & Font, 2006), que permite abordar cuestiones de tipo instruccional: *¿Qué tipos de interacciones didácticas se deberían implementar en los procesos instruccionales que permitan optimizar los aprendizajes matemáticos?*

Las nociones de dimensión normativa (Godino, Font, Wilhelmi, & Castro, 2009) e idoneidad didáctica (Godino, 2013), nuevas preguntas se introducen para hacer posible la reflexión meta-didáctica:

- ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales, cómo se establecen y pueden cambiarse para optimizar el aprendizaje matemático?
- ¿En qué medida se puede valorar como idóneo un proceso de estudio en unas circunstancias dadas y qué cambios se podrían introducir para mejorar dicha idoneidad?

Los postulados ontológicos del EOS se corresponden con los formulados en la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein (Baker & Hacker, 1985; Bloor, 1983; Wittgenstein, 1978):

> Los conceptos/definiciones y las proposiciones son consideradas como reglas “gramaticales” de un cierto tipo. Desde este punto de vista, los enunciados matemáticos son reglas (de tipo gramatical) que gobiernan el uso de cierto tipo de signos, puesto que precisamente es así como se usan, como reglas. No describen propiedades de objetos matemáticos con ningún tipo de existencia que sea independiente de las personas que deseen conocerlos o del lenguaje mediante el cual se conocen. (Font, Godino, & Gallardo, 2013, p. 110)

Desde el punto de vista metodológico el EOS tiene en cuenta las cuatro fases propias de las investigaciones orientadas al diseño educativo: estudio preliminar, diseño, implementación y análisis retrospectivo. En cada una de ellas se tienen en cuenta las siguientes facetas o dimensiones:

- *Epistémica-ecológica*. Se determinan los significados institucionales puestos en juego en cada una de las fases del proceso; tales significados son interpretados en términos de sistemas de prácticas y configuraciones de objetos y procesos matemáticos. Asimismo, se observa el sistema de relaciones y restricciones institucionales que condicionan el proceso de estudio.
- *Cognitiva-afectiva*. Se describen los significados personales de los estudiantes en los distintos momentos del proceso de estudio, en términos de sistemas de prácticas personales y configuraciones cognitivas de

objetos y procesos matemáticos. Además se analiza la sensibilidad del proceso a los estados afectivos (actitudes, emociones, creencias, valores) de los alumnos con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

- *Instruccional (interaccional-mediacional)*. Se analizan los patrones de interacción entre el profesor y los estudiantes y su secuencia, orientada a la fijación y negociación de significados. Asimismo, se describen los recursos técnicos previstos o utilizados y se valora el uso del tiempo destinado a las distintas acciones y procesos, así como los agentes participantes y su papel.

6. Concordancias y complementariedades

En este apartado iniciamos la comparación de la etnomatemática, teoría antropológica y socioepistemología desde la perspectiva del EOS, siendo conscientes del carácter limitado de este estudio.

6.1. Etnomatemáticas y EOS

Un punto central de la etnomatemática es la reivindicación del carácter matemático de las prácticas que realizan los grupos culturales diversos para abordar determinadas actividades profesionales y de la vida cotidiana. Matemáticas no son solo el producto de la actividad del matemático profesional, caracterizada por el uso de lenguajes formales, la argumentación deductiva y la generalidad de los teoremas, sino que matemáticas son también las prácticas que realizan “grupos culturales, tales como comunidades urbanas y rurales, grupos de trabajadores, grupos de profesionales, niños de cierta edad, sociedades indígenas y otros que se identifican por objetivos o tradiciones comunes” (D’Ambrosio, 2008, p. 9). “Desde sus primeros trabajos, D’Ambrosio resaltó que lo que llamamos matemáticas es una etnomatemática específica – aquella que es practicada por los matemáticos en las instituciones académicas” (Knijnik, 2012, p. 89).

Esta visión de las matemáticas es concordante con la onto-epistemología EOS; de manera particular se deriva de la forma en que se define la noción de práctica matemática, y de asumir el postulado de su relatividad institucional y personal. Así mismo, es consecuencia de cómo se interpreta la noción de institución, la cual abarca cualquier grupo cultural, étnico, contextos de uso, en general cualquier comunidad de prácticas que compartan una misma clase de situaciones problemáticas y, por tanto, comparten también los mismos artefactos y modos de dar respuesta a las mismas.

Por otra parte, el EOS ha desarrollado una visión antropológica del objeto matemático, como emergente (e interviniente) de las prácticas matemáticas, ligado a las reglas gramaticales de los lenguajes que se usan para describir los distintos mundos en los que las personas participan (perspectiva discursiva – Wittgenstiniana), así como una tipología de objetos y procesos, que pueden enriquecer el análisis de actividad matemática. La noción de configuración ontosemiótica puede caracterizar de una manera detallada las prácticas matemáticas de los grupos culturales, y por tanto, describir y explicar las diferencias y semejanzas entre las diferentes "variedades epistémicas" de matemáticas.

El relativismo epistemológico que implica la etnomatemática, que a algunos autores lleva a poner en el mismo plano las matemáticas de los grupos étnicos/culturales que las matemáticas académicas, ha recibido algunas críticas (Rowlands & Carson, 2002; Vithal & Skovsmose, 1997). Llevado a sus últimas consecuencias este relativismo impide reconocer el carácter universal y necesario de las proposiciones matemáticas, lo cual no deja de ser impertinente.

En el EOS se postula también un relativismo para las prácticas, objetos y significados matemáticos, pero al mismo tiempo se reconocen las relaciones ecológicas existentes entre las distintas formaciones epistemológicas que constituyen las diversas "variedades de matemáticas". Se puede asumir que la matemática en cierto sentido es múltiple, pero al mismo tiempo es única (Font, Godino, & Gallardo, 2013), lo que permite superar el dilema del relativismo.

El análisis del programa etnomatemático, en su componente educativo, revela que una parte sustancial del mismo es investigación orientada al diseño instruccional (Oliveras & Godino, 2015). Pero carece de una teoría instruccional explícita que apoye el diseño, implementación y análisis retrospectivo de las intervenciones educativas que trata de realizar. Con frecuencia encontramos trabajos "etnomatemáticos" que usan herramientas de otros marcos (educación matemática realista, ingeniería didáctica, …), de lo cual se deriva un cierto bricolaje teórico, no siempre coherente y productivo.

El EOS puede aportar herramientas analíticas para analizar los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas (sistema de prácticas, configuración ontosemiótica), herramientas para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje en el aula (configuración y trayectoria didáctica), y para la reflexión meta-didáctica (dimensión normativa e idoneidad didáctica). Por tanto, las herramientas EOS pueden ayudar a realizar esa descripción detallada de las prácticas matemáticas y didácticas que reclaman Vithal y Skovsmose (1997).

Por otra parte, la perspectiva etnomatemática enriquece la faceta ecológica del EOS al incorporar categorías analíticas de los componentes sociales y políticos implicados en la educación matemática. Así mismo, la reconstrucción de significados de referencia para los contenidos pretendidos, paso previo indispensable para la selección representativa de situaciones y configuraciones de objetos y procesos, debe tener en cuenta el factor multicultural de los contextos educativos correspondientes.

6.2. Teoría antropológica de lo didáctico y EOS

El EOS surgió como respuesta a la necesidad de precisar algunas nociones teóricas introducidas por Chevallard en los comienzos de desarrollo de la TAD, en particular la noción de práctica, objeto e institución, así como por la necesidad de articular las aproximaciones epistemológicas, cognitivas y semióticas a la investigación en educación matemática (Godino & Batanero, 1994).

> La distinción entre el dominio de lo personal y de lo institucional y de sus mutuas interdependencias es uno de los ejes principales de la antropología cognitiva. Pero un énfasis excesivo en lo institucional puede ocultar la esfera de lo mental, de los procesos de cognición humana, que quedan diluidos en la teorización de Chevallard, de los que en un enfoque sistémico de la didáctica no se puede prescindir. La consideración explícita de este dominio nos lleva a diferenciar entre objeto institucional, base del conocimiento objetivo y objeto personal (o mental), cuyo sistema configura el conocimiento subjetivo y proporciona una interpretación útil a la noción de concepción del sujeto (Artigue, 1991), así como a las de concepto y teorema en acto (Vergnaud, 1991). (Godino & Batanero, 1994, p. 333)

Vistas desde un punto de vista retrospectivo, la principal noción desarrollada por la TAD, la praxeología matemática, que sintetiza la epistemología antropológica sobre la matemática (Wittgenstein, 1953; Bloor, 1983) se puede relacionar con las nociones de *sistema de prácticas*, operativas y discursivas y *configuración ontosemiótica* introducidas en el EOS.

Las praxeologías matemáticas se describen resaltando en su composición cuatro mega-objetos: tareas, técnicas, tecnologías y teorías. Pero esto no quiere decir que se pierde su origen o motivación antropológica, esto es, la emergencia y relatividad de las praxeologías respecto de las prácticas sociales que realizan las personas. Una praxeología es una organización matemática, una obra o resultado del trabajo colectivo realizado por personas para dar respuesta a un tipo de cuestiones. En la base está, por tanto, las prácticas o acciones que realizan las personas con la finalidad de resolver las cuestiones en un marco institucional dado, esto es, la cuaterna praxeológica está apoyada de manera consustancial en el sistema de prácticas sociales operativas y discursivas correspondiente.

En esas prácticas intervienen diversos tipos de objetos. La TAD ha destacado como intervinientes cuatro "mega-objetos": las cuestiones o tareas que motivan la actividad, las técnicas que se ponen en funcionamiento (esto es, prácticas operativas), las descripciones y justificaciones de las técnicas (tecnología, o sea, prácticas discursivas) y la teoría, entendida como justificación de la tecnología (de nuevo prácticas discursivas de segundo orden). Tanto en las técnicas como en las tecnologías y teorías intervienen otros tipos de objetos (algoritmos, definiciones, proposiciones, conjeturas, teoremas), pero no se han modelizado en el marco de la TAD.

La herramienta praxeología matemática está bien adaptada para realizar análisis de los saberes matemáticos a nivel macroscópico, que es el objetivo de la TAD, pero es poco fina para análisis más microscópicos de la actividad matemática. Esta es la razón por la que el EOS ha introducido la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos, y las cinco dualidades contextuales que se puede atribuir a los objetos y procesos. Se considera que el polo tecnológico/teórico (logos) se debe descomponer explícitamente en entidades más elementales y operativas (conceptos-definición, proposiciones, argumentaciones) y nos parece necesario añadir un tercer polo formado por el sistema de objetos perceptibles mediante los cuales ser expresan y operan los otros dos polos (el lenguaje). El análisis detallado de los procesos de resolución de tareas matemáticas revela que las fases de desarrollo de las técnicas (en general, elementos procedimentales) suponen la aplicación contextualizada de objetos intensivos (conceptos-regla y proposiciones) y validativos, al menos de manera implícita. De igual modo, la elaboración de justificaciones requiere la aplicación de elementos procedimentales y situacionales. Esta circunstancia nos parece que resta relevancia a la distinción praxis-logos (y la de tecnología-teoría): los elementos discursivos y regulativos son densos por doquier en la actividad matemática.

El sistema teórico del EOS es una ampliación de la TAD (D’Amore & Godino, 2007), porque si bien los “sistemas de prácticas” se pueden asimilar como una primera versión de las praxeologías matemáticas, la noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos desarrolla y complementa de manera importante la noción de praxeología. De igual modo, respecto del componente instruccional la noción de praxeología didáctica, momentos didácticos y recorridos de estudio e investigación son ampliados con las nociones de configuración y trayectoria didáctica. Además, el EOS ha introducido herramientas teóricas potentes para el análisis meta-didáctico, como son las de dimensión normativa e idoneidad didáctica.

6.3. Socioepistemología y EOS

La teoría socioepistemológica en matemática educativa (TSEM) asume una concepción de las matemáticas como actividad humana, mediada por el uso de herramientas y realizada en contextos organizados socialmente, lo que nos lleva a relacionarla de manera estrecha con el EOS y la TAD.

En el caso del EOS y también en la TAD se ha optado por no distinguir entre la dimensión epistemológica y la sociocultural al adoptar una visión ampliada de la epistemología. Para el EOS y la TAD, la epistemología tiene que ser entendida en términos socioepistemológicos, o mejor, en términos antropológicos. Como también se informó anteriormente:

> La “antropología del conocimiento” de Chevallard es una extensión de la epistemología, en el sentido de que, tradicionalmente, el objeto de estudio de la

> epistemología era la producción del conocimiento científico, mientras que la antropología del conocimiento se considera que se ocupa no solo de los mecanismos de la producción sino también con las prácticas relacionadas con el uso o aplicación del conocimiento científico, su enseñanza, y su transposición, esto es el tratamiento del conocimiento que hace que ciertos aspectos del mismo se adapten para funcionar en distintos tipos de instituciones (la escuela es una de ellas). (Sierpinska & Lerman, 1996, p. 856)

Tanto la TSEM como el EOS y la TAD asumen supuestos similares acerca del origen humano de los objetos matemáticos, y por tanto, el rechazo de posiciones platónicas. Los objetos matemáticos son entidades emergentes de sistemas de prácticas sociales ligadas a campos de situaciones problemas. De este modo, la indagación de los tipos de situaciones-problemas, y de los sistemas de prácticas sociales asociadas en distintos momentos históricos y contextos institucionales es una estrategia metodológica compartida. Tales problemas y sistemas de prácticas son el punto de partida para la elaboración de propuestas de intervención en los currículos y en las clases de matemáticas.

La distinción entre "situación problema" y "práctica matemática" que propone el EOS puede ayudar a clarificar la noción de práctica social de la TSEM. Por ejemplo, la práctica social de la predicción no es entendida en la TSEM como "lo que hace en sí el individuo o el grupo, sino aquello que les hace hacer lo que hacen, aun sin adquirir conciencia de sus acciones" (Cantoral et al., 2014, pp. 98–99). Sería necesario precisar qué es "lo que les hace hacer lo que hacen" en el caso de la práctica social de predecir. El EOS propone analizar la "acción de predecir" distinguiendo entre la "situación-problema" de predicción y las técnicas o acciones realizadas para resolver esa tarea o situación problemática. De esta manera, un tipo de problemas puede ser compartido por distintos grupos sociales o marcos institucionales, pero las acciones (o prácticas propiamente dichas) pueden diferir, y por tanto los objetos emergentes de tales prácticas (procedimientos, recursos lingüísticos, reglas y justificaciones). En el seno de las sociedades se pueden compartir ciertas necesidades y maneras de afrontarlas, pero estas prácticas (acciones situadas e intencionales) pueden ser diversas en grupos sociales diferentes. Ciertamente, en cada comunidad de prácticas las maneras de abordar la solución de los problemas están regulada por la costumbre, la tradición, el hábito.

En el EOS para hablar de práctica social es necesario especificar el tipo de situación-problema que se aborda y el marco institucional específico donde se realiza, ya que tales prácticas son relativas o dependientes de dichos componentes. En la definición de práctica matemática dada por Godino y Batanero (1994) estaban implícitas las características de ser, una acción-situada orientada hacia el fin de dar solución a una determinada tarea o situación-problema, apoyada en el uso de recursos específicos. Cuando es compartida en el seno de una comunidad o institución adquiere también una valencia normativa. En síntesis, una práctica social es una acción compartida, situada, intencional y normada. Entendiendo que tales acciones (manifestaciones, conductas observables) pueden ser de tipo operativo o discursivo, y dado su carácter normativo (tecnológico, teórico) podemos establecer una estrecha similitud con la noción de praxeología de la TAD. Pero como hemos explicado antes, el nivel microscópico de análisis que se requiere de la actividad matemática, requerido para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje, hace necesario la introducción de la herramienta configuración ontosemiótica.

En la TSEM se usa con frecuencia el término "resignificar" con un sentido que nos parece concuerda con los postulados pragmáticos asumidos en el EOS para los significados de los objetos matemáticos, tanto desde el punto de vista institucional como personal. Un mismo objeto matemático puede tener diversos significados dependiendo de los marcos institucionales, contextos de uso y juegos de lenguaje en que participa. El aprendizaje supone la construcción y articulación progresiva de los diversos significados parciales de los objetos.

Consideramos que el EOS puede aportar a la TSEM algunas herramientas teóricas útiles para el estudio de la dimensión cognitiva, esto es, el estudio de los significados personales de los alumnos: sistemas de prácticas personales, objetos personales, dualidades cognitivas, conflicto semiótico. Esto permite un nivel de análisis más microscópico, con posibilidades descriptivas y explicativas nuevas.

Para la faceta o dimensión instruccional nos parece que la TSEM asume en gran medida la teoría de situaciones (Brousseau, 1986, 1998) como modelo teórico de referencia y la ingeniería didáctica (Artigue, 1992) como metodología de investigación de propuestas de intervención en el aula. La teoría de las configuraciones didácticas, dimensión normativa y los criterios de idoneidad de un proceso de estudio matemático (Godino, Contreras, & Font, 2006) pueden ser herramientas complementarias, las cuales pueden ayudar a superar los dilemas que el constructivismo plantea a la teoría de situaciones (Radford, 2008).

7. Reflexiones finales

El modelo epistemológico propuesto por el EOS es concordante, en líneas generales, con los correspondientes a la ETM, TAD y la TSEM. Comparte supuestos antropológicos similares sobre la actividad matemática y sobre los procesos y productos socioculturales emergentes. El EOS, no obstante, incorpora en su concepción de las matemáticas, de manera explícita, los elementos básicos del giro lingüístico introducido por Wittgenstein en la filosofía de las matemáticas y los aportes de la semiótica peirceana, para describir y explicar los procesos de comunicación e interpretación matemática.

El giro antropológico y sociocultural en la manera de concebir las matemáticas no debería suponer, sin embargo, un olvido de la dimensión cognitiva, esto es, del papel del sujeto que construye y aprende matemáticas. Por esta razón el EOS introduce, junto a un modelo de cognición institucional otro modelo de cognición individual, construido sobre las mismas bases pragmáticas y antropológicas que el modelo de cognición institucional. En este sentido consideramos que el EOS puede ser un desarrollo coherente de los modelos teóricos mencionados, en los que la dimensión cognitiva queda en un segundo plano, o es modelada sobre bases teóricas dispares.

Aunque no sea posible, o incluso deseable, tratar de construir una "teoría holística que lo explique todo", la educación matemática puede progresar en la construcción de un sistema conceptual y de herramientas metodológicas que hagan posible los análisis de nivel macro y micro de las dimensiones epistémica, ecológica, cognitiva, afectiva e instruccional implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje, así como tener en cuenta las interacciones entre las mismas. Como Ruthven (2014) sugiere,

> Esto implica adoptar un punto de vista modular, tanto con respecto a la descomposición de las teorías en componentes de herramientas analíticas y con respecto a la composición de herramientas provenientes de diferentes teorías; mediante la posibilidad de que una teoría tome prestadas herramientas de otra o de la improvisación de nuevos marcos que combinen herramientas de varias teorías fuente para abordar un nuevo tipo de cuestión o un tipo antiguo de cuestiones de una nueva manera. (Ruthven, 2014, p. 278)

La construcción del sistema teórico EOS, iniciada a partir de la publicación del artículo "Significado Institucional y Personal de los Objetos Matemáticos" en RDM (Godino & Batanero, 1994), tiene un carácter progresivo y dinámico, como se muestra en los artículos posteriores publicados en diversas revistas especializadas y actas de congresos. Es fruto, además de la reflexión sobre los marcos teóricos usados en educación matemática, de múltiples investigaciones experimentales realizadas en el seno de diversos proyectos y programas de doctorado, como queda reflejado en el sitio web:
http://enfoqueontosemiotico.ugr.es

El EOS se propone tener en cuenta las diversas dimensiones y niveles de análisis (Figura 1) requeridos por la investigación sobre los procesos de estudio matemáticos en los diversos contextos en que tienen lugar. Por esta razón se prefiere describir como un enfoque, o sistema teórico, y no como una teoría local, intermedia o global. Las diversas herramientas conceptuales y metodológicas introducidas, sin duda sujetas a refinamiento y ampliación, para abordar los problemas epistemológicos, ontológicos, semióticos, cognitivos, instruccionales de la educación matemática, aportan un carácter inclusivo, modular y abierto al EOS. Esto permite introducir una nueva perspectiva en el problema de la articulación de teorías en educación matemática.

Aunque desde el inicio de la construcción del EOS se han tratado de mostrar las concordancias y complementariedades con otras teorías, en particular, con teorías que forman parte de la "escuela francesa de didáctica de las matemáticas" (Godino, Font, Contreras, & Wilhelmi, 2006), como la teoría de situaciones didácticas (TSD), TAD, teoría de los campos conceptuales (TCC), teoría de los registros de representación semiótica (TRRS), y se ha continuado con otros estudios comparativos, el problema continúa abierto. Somos conscientes de las dificultades de esta empresa, porque en el fondo se está proponiendo una estrategia para aplicar el principio de la "navaja de Occam": construir un sistema teórico híbrido, no una gran teoría superficial e ineficaz, que permita suprimir, por ser confusas, redundantes, o poco eficientes, algunas de las teorías existentes.

Puesto que cada teoría conlleva una comunidad de fervorosos practicantes, que comparten no solo ideas sino también intereses diversos (económicos, políticos, afectivos), es de suponer que las resistencias para su inclusión en otro marco más amplio serán muy fuertes. Es natural que se produzcan fenómenos de protección y delimitación de fronteras que limitan los movimientos de sus miembros, generando relaciones de dependencia y subordinación.

La didáctica de las matemáticas, como campo de investigación, tiene como finalidad epistémica comprender una parcela de la realidad y producir enunciados válidos sobre ella, como resultado de la indagación científica. Pero el campo de juego de la investigación científica tiene, además, una dimensión social y es también una competición entre agentes, "lo que resulta en una distribución desigual de algunas formas específicas de capital – una fuente de ventaja en el propio juego y una fuente de poder sobre los otros agentes" (Grugeon-Allys, Godino, & Castela, 2016, p. 83). Ser reconocido como productor de una teoría proporciona crédito material y simbólico a un investigador. Este fenómeno estimula la multiplicación de teorías: hay un mayor potencial, desde un punto de vista individual, en crear la propia teoría que en buscar la aprobación para una contribución en una teoría existente.

¿Qué ocurre si el mundo creado alrededor de una teoría está sesgado, se apoya en herramientas poco efectivas y apoya una visión parcial y distorsionada de la realidad que se estudia? Se puede producir un fenómeno de sectarismo que atrapa a sus miembros y restringe sus grados de libertad. Una teoría, por tanto, puede ser un factor de desarrollo del conocimiento científico, pero también una rémora cuando la "afectividad sociológica" que conlleva interacciona negativamente con la "racionalidad científica", entendida ésta como el empeño intelectual humano de alcanzar una comprensión del mundo. Tomar conciencia de la tensión existente entre la necesidad epistemológica de simplificar las teorías y los condicionantes sociológicos planteados por el juego de poder implicado en cualquier campo científico puede ser el primer paso para superar el dilema.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2016-74848-P (FEDER, AEI).

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (1991). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2–3), 241–286.

Artigue, M. (1992). Didactique engineering. En R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactique of mathematics* (pp. 41–66). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Baker, G. P., & Hacker, P. M. S. (1985). *Wittgenstein: Rules, grammar and necessity: An analytical commentary on the philosophical investigations* (Vol. 2). Glasgow: Basil Blackwell.

Barton, B. (1996). Making sense of ethnomathematics: Ethnomathematics is making sense. *Educational Studies in Mathematics, 31*(1)*,* 201–233.

Bikner-Ahsbahs, A., & Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Cham: Springer International Publishing.

Bishop, A. J. (1994). Cultural conflicts in mathematics education: Developing a research agenda. *For the Learning of Mathematics*, *14*(2), 15–18.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein: A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970–1990*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon,* 42, 353–369.

Cantoral, R., & Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *6*(1), 27–40.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, matemáticas y realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(3), 91–116.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73–112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221–266.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1997): *Estudiar matemática: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: ICE Horsori.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 5*(1), 44–48.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática, eslabón perdido entre las tradiciones y la modernidad*. México, DF: Limusa.

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2007). El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *10*(2), 191–218.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97–124.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics, 1*(1–2), 3–8.

Gascón, P. J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(1), 7–33.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2–3), 237–284.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *8*(11), 111–132.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 39*(1–2), 127–135.

Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39–88.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A., & Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *9*(1), 117–150.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., & Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59–76.

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *34*(2–3), 167–200.

Grugeon-Allys, B., Godino, J. D., & Castela, C. (2016). Three perspectives on the issue of theoretical diversity. En B. R. Hodgson, A. Kuzniak, & J.-B. Lagrange (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* (pp. 57–86). Cham: Springer.

Knijnik, G. (2012). Differentially positioned language games: Ethnomathematics from a philosophical perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(1–2), 87–100.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Oliveras, M. L., & Godino, J. D. (2015). Comparando el programa etnomatemático y el enfoque ontosemiótico: Un esbozo de análisis mutuo. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *8*(2), 432–449.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 165–178.

Radford, L. (2008). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Working paper, ICMI 11 Survey Team 7: The notion and role of theory in mathematics education research* (pp. 1–17). Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/253274896

Rowland, S., & Carson, R. (2002). Where would formal, academic mathematics stand in a curriculum informed by ethnomathematics? A critical review of ethnomathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(1), 79–102.

Ruthven, K. (2014). From networked theories to modular tools? En A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), *Networking of theories as a research practice in mathematics education* (pp. 267–279). Cham: Springer International Publishing.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & L. Colette (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827–876). Dordrecht: Kluwer.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Wijers, M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *ZDM Mathematics Education*, *37(*4), 287–307.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *10*(2–3), 133–170.

Vilela, D. (2010). Discussing a philosophical background for the ethnomathematical program. *Educational Studies in Mathematics*, *75*(3), 345–358.

Vithal, R., & Skovsmose, O. (1997). The end of innocence: A critique of 'Ethnomathematics'. *Educational Studies in Mathematics, 34*(2), 131–158.

Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Wittgenstein, L. (1978). *Remarks on the foundations of mathematics* (G. H. von Wright, R. Rhees, & G. E. M. Anscombe, Eds.). Oxford: Basil Blackwell. (Trabajo original publicado en 1956).

Empoderamiento docente: Variación y predicción en matemáticas

Teacher empowerment: Variation and prediction in mathematics

Daniela Reyes-Gasperini,[1] Leonardo Federico Palmeri[2,3] y Ricardo Cantoral Uriza[1]

[1] *Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, Ciudad de México, México*

[2] *Escuela de Educación Secundaria Técnica N° 1, El Talar, Buenos Aires, Argentina*

[3] *Instituto Superior de Formación Docente y Técnica Nº 93, San Vicente, Buenos Aires, Argentina*

Abstract. *This article presents an analysis of the role played by teacher empowerment based on a series of experimental results of an educational intervention action. A learning situation designed by the PIDPDM was adapted and implemented under the support of the evolution of practices, namely: an evolution that begins with buying, serializing, then predict and, finally, estimating. The design uses the container filling as a factual resource to mentally recreate predictive practices. In the first place, the emergence of a "new relationship" with the mathematical knowledge that the participant teacher-researcher declares through narrative is documented, in order to highlight aspects of the social construction of mathematical knowledge among his students. The article has two levels of analysis, the teacher's dialogues with his students and the reflections of the participating students. Both levels are processed through discourse analysis, classroom interactions with a socio-epistemological perspective, identifying the students' elaborations that contribute to the development of their own variational thinking.*

Keywords: learning situation, development of mathematical thought, teacher empowerment, variational thinking.

Sunto. *Questo articolo presenta un'analisi del ruolo svolto dall'empowerment degli insegnanti sulla base di una serie di risultati sperimentali di un'azione di intervento educativo. Una situazione di apprendimento progettata dal PIDPDM è stata adattata e implementata con il supporto dell'evoluzione delle pratiche, vale a dire: un'evoluzione che inizia con l'acquisto, proseguendo con la serializzazione, per poi prevedere e, infine, stimare. Il design utilizza il riempimento del contenitore come una risorsa reale per ricreare mentalmente le pratiche predittive. In primo luogo, l'emergere di una "nuova relazione" con la conoscenza matematica che l'insegnante-ricercatore partecipante dichiara attraverso la narrazione è documentata, al fine di evidenziare aspetti della costruzione sociale della conoscenza matematica tra i suoi studenti. L'articolo ha due livelli di analisi, i dialoghi dell'insegnante con i suoi studenti e le riflessioni degli studenti partecipanti.*

Entrambi i livelli sono elaborati attraverso l'analisi del discorso, le interazioni della classe con una prospettiva socio-epistemologica, individuando le elaborazioni degli studenti che contribuiscono allo sviluppo del proprio pensiero variazionale.

Parole chiave: situazione di apprendimento, sviluppo del pensiero matematico, emancipazione docenti, pensiero variazionale.

Resumen. *Este artículo presenta un análisis del papel que juega el empoderamiento docente con base en una serie de resultados experimentales de una acción de intervención educativa. Se adaptó e implementó una situación de aprendizaje diseñada por el PIDPDM bajo el sustento de la evolución de prácticas, a saber: una evolución que comienza con comprar, siguiendo con seriar, para luego predecir y, finalmente, estimar. El diseño utiliza al llenado de recipientes como un recurso factual para recrear mentalmente las prácticas predictivas. En primer lugar, se documenta la emergencia de una "nueva relación" con el conocimiento matemático que declara mediante narrativa el profesor-investigador participante, a fin de poner en evidencia aspectos de la construcción social del conocimiento matemático entre sus estudiantes. El artículo tiene dos planos de análisis, los diálogos del profesor con sus alumnos y las propias reflexiones de los estudiantes participantes. Se procesan ambos niveles mediante un análisis del discurso, las interacciones áulicas con una perspectiva socio-epistemológica, localizando las elaboraciones de los estudiantes que coadyuvan al desarrollo de su propio pensamiento variacional.*

Palabras clave: situación de aprendizaje, desarrollo del pensamiento matemático, empoderamiento docente, pensamiento variacional.

1. Introducción

Esta experiencia es fruto de una acción de empoderamiento, una iniciativa de un profesor participante del Programa Nacional Aprender Matemática (PNAM) en el Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje en Matemáticas (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología [ME], 2018). El PNAM es un programa de la Secretaría de Innovación y Calidad Educativa del Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de Argentina, con el apoyo de la Organización de Estados Iberoamericanos, sede Argentina (OEI ARG) y del Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas (PIDPDM) del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav-IPN) de México, que en conjunto realizan una intervención colaborativa con Argentina.

Si bien el PNAM cuenta con cuatro encuentros presenciales y un acompañamiento virtual durante un periodo de diez meses, donde miembros del equipo académico del PIDPDM, Cinvestav-IPN, México, trabajan de manera conjunta con profesoras y profesores de matemáticas de todas las provincias de la República Argentina, esta experiencia nace de las reflexiones conjuntas de tiempo atrás.

La propuesta se fundamenta teóricamente en la construcción social del conocimiento matemático que impulsa la teoría socioepistemológica de la matemática educativa (TSME) (Cantoral, 2013), un paradigma alternativo basado en la pragmática. A partir del diseño de *situaciones de aprendizaje* sustentadas en *prácticas socialmente compartidas*, se promueve el *desarrollo del pensamiento matemático* y la significación del conocimiento mediante el uso. En particular, se promueve el empoderamiento docente entendido como cambio de relación al conocimiento matemático escolar, a su vez el empoderamiento es concebido, explícitamente, como una práctica emancipadora para el desarrollo profesional docente (Reyes-Gasperini, 2016).

En este caso, el profesor Francisco[1], participante de uno de los grupos de trabajo, luego del primer encuentro, volvió a su práctica docente regular y ante la necesidad de trabajar en su curso el tema matemático de derivada de funciones reales de variable real, tomó el solo la iniciativa (señal de empoderamiento) de solicitar al equipo del PIDPDM algún diseño de situación de aprendizaje que pudiese abordarse desde la perspectiva socioepistemológica. Así fue como recibió una primera propuesta con los fundamentos correspondientes, se apropió de ella mediante su estudio y puesta en escena. Posteriormente él mismo realizó un primer análisis libre de lo ocurrido en la clase, registrándolo como auto narrativas reflexivas poniendo el énfasis en el quehacer interpretativo de sus alumnos. Su conclusión principal consistió en presentar una mejora, tanto en las dimensiones socioemocionales, como en las cognitivas cuando se puso en situación de construcción social a sus alumnos. El diseño de la actividad fue escenificado, si bien fue concebida previamente, el profesor realizó una serie de adaptaciones interesantes al propio contexto escolar donde se desempeña en la provincia de Buenos Aires.

Se muestran a continuación algunos elementos preliminares que permitirán, a la postre, el análisis de la experiencia desde el punto de vista del empoderamiento docente. El eje del pensamiento matemático elegido fue el pensamiento y lenguaje variacional. Veamos a continuación una breve explicación de su contenido. Es decir, cuando se cuenta con una situación de aprendizaje basada en la TSME que propicie los espacios para el desarrollo de conjeturas, se ponen a prueba sus ideas confrontándolas con las de sus compañeros y puedan jugar roles diferenciados al ponerse en el lugar del otro para comprender las razones de sus planteamientos, estas implementaciones les estimulan al trabajo con una predisposición favorable hacia la construcción de nuevas redes de nociones que si bien ya manejaban parcialmente, no eran necesariamente interrelacionados de forma consiente, de modo que al hacerlo, se desarrollan o modifican los significados mediante el uso.

[1] Nombre ficticio para guardar anonimato.

2. El pensamiento y lenguaje variacional en la escuela

Uno de los ejes del pensamiento matemático implícito en la educación básica obligatoria y explícito en la educación superior y la vida profesional, es justamente el que se ocupa de la *variación* y el *cambio*. El cambio como cualidad subjetiva se percibe, mientras que la variación, en tanto cantidad objetiva, se compara y se mide. De modo que para analizar los sistemas dinámicos o para comparar simplemente estados sucesivos del cambio, se precisa del *pensamiento variacional*, este pensamiento sirve para construir hipótesis predictivas y para reconocer el efecto del cambio en la variación.

El *pensamiento y lenguaje variacional* está presente, por tanto, en una gran cantidad de situaciones de la vida diaria, por ejemplo, en el manejo del lenguaje natural para la percepción del clima atmosférico se emplean expresiones como "frío", "templado", "caliente" y adjetivos como "muy", "más", "súper". Las temperaturas primero son percepciones, pero pueden medirse con base en un sistema de referencia y una unidad de medida adecuada, así se determinan estados: E_1, E_2, E_3 ("frío", "templado", "caliente") y estados adjetivados $E_i + e_i$ ("muy frío", ...). O también para describir las alturas de un cuerpo de agua en un recipiente, solemos usar gestos sugerentes hacia la superficie superior. Estos lenguajes variacionales, si bien metafóricos, conservan el profundo sentido de la matematización del cambio.

Estas interacciones lingüísticas de corte sociocultural precisan mediaciones entre percepción (individual) y medición (compartida). La variación, en consecuencia, para ser construida requiere además de una componente cognitiva que represente internamente al cambio, se precisa de un lenguaje que materialice la evolución del sistema y la comparación de estados sucesivos. Tres preguntas claves fueron necesarias para organizar la experiencia del cambio: ¿Qué cambia?, ¿Cómo cambia?, y ¿Por qué cambia como lo hace?

> Empecemos con una caracterización: El *pensamiento y lenguaje variacional* estudia fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Pone particular atención en el estudio de los procesos cognitivos y culturales con los que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Es a la vez que una ruta para el desarrollo, una línea de investigación que posee una orientación múltiple, ya que se ocupa primeramente de las estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y fenomenológico, en segundo término estudia las funciones cognitivas que las personas asignan mediante el uso de conceptos y propiedades del cambio, finalmente también se ocupa de las tareas y las situaciones que abordan y resuelven en el terreno social mediante prácticas variacionales consideradas en el aula, el laboratorio y en la vida diaria. (Cantoral, 2019)

El caso que presentamos enseguida, el llenado de recipientes con flujo constante ilustra la forma en que los jóvenes construyen sistemas de referencia y unidades de medida, así como explicaciones causales de la evolución del proceso de llenado. Sus palabras reflejan una cognición situada que secuencia los cambios y mide progresivamente sus variaciones (incrementos de altura con el paso del tiempo). Debido a ese análisis es que pueden predecir el desenlace y su estado final, se basan en los datos de origen (recipientes cilíndricos vacíos, llenándose con flujo constante). Estos sistemas dinámicos, denominados determinísticos, pueden ser matematizados mediante una expresión lineal general, para cada x dado, como sigue:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h)$$

con $\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$, es decir, da lugar a la definición de derivada de f:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Para el caso de los juicios de les estudiantes de esta experiencia, se registra cómo es que construyen una secuencia temporal t_1, t_2, t_3, … para tratar la evolución del sistema del primero al segundo momento, del segundo al tercero, etc.

Consideramos que en las expresiones cotidianas se "ocultan" los primeros hechos, la denominada etapa factual del significado. Al comparar recipientes de diferente diámetro, pero con la misma capacidad, realizan procedimientos pre simbólicos que anticipan el desenlace del fenómeno. Es justo ahí donde se construyen conjeturas bajo distintos tipos de razonamiento: inductivo, deductivo y abductivo y emergen como producto las prácticas predictivas. En una segunda fase del proceso de construcción de significado se presentan los procedimientos, por ejemplo, a mayor diámetro, más lento sube. Al final, emerge un significado simbólico, la pendiente de la recta que describe que el crecimiento es mayor para el cilindro más delgado.

En síntesis, es el pensamiento y lenguaje variacional el que opera como sustento de sus expresiones verbales, gestuales, visuales o simbólicas formales. Ahora bien, este proceso fue desarrollado por la colaboración entre el diseño de la situación de aprendizaje y su implementación-adaptación que realiza el profesor Francisco. Este doble esfuerzo, entender la racionalidad del diseño y su puesta *ad hoc* en un aula concreta, brinda evidencias de un proceso de empoderamiento. A continuación, damos una síntesis de dicho proceso.

3. El proceso de empoderamiento docente

El profesor Francisco, quien estuvo a cargo de esta experiencia, en un primer momento, de manera colegiada con un grupo de cincuenta colegas profesores (aproximadamente) y un miembro del equipo académico del PIDPDM, Cinvestav-IPN, vivenció una dinámica de problematización para la matemática escolar. En primer término, reflexionó sobre cómo el discurso matemático escolar provocaba exclusión de la posibilidad de una construcción social del conocimiento matemático (Soto & Cantoral, 2014), reconociendo sus elementos y ejemplificándolos en el trabajo con funciones (aspecto I). Asimismo, se revisaron distintas investigaciones que estudiaron la noción de función en distintos escenarios analizando la correlación de sus resultados con lo que sucede habitualmente en sus aulas. Posteriormente, se analizaron actividades típicamente escolares para identificar, con base en bibliografía especializada (aspecto II), cuáles eran las fortalezas y las áreas de oportunidad de cada una (aspecto III). Esta secuencia de aspectos tenía como fin analizar y poner en evidencia que toda actividad planteada es propensa a un rediseñado pues, todo enunciado se acompaña de la gestión áulica, didáctica y matemáticamente hablando, de un profesional de la educación (aspecto IV).

Como paso siguiente, se vivenció una situación de aprendizaje titulada "Vos, él y ella. ¿Quién es más alto?" (Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología [ME], 2019), donde reflexionó sobre las distintas argumentaciones, posibles estrategias y cómo las acciones, actividades y prácticas eran la base para el trabajo con la construcción del conocimiento matemático en el escenario áulico (aspecto V). Para finalizar, se analizaron los fundamentos de la situación de aprendizaje y se recuperó el análisis realizado de las actividades típicamente escolares para confrontar con la situación de aprendizaje, con el fin de generar rediseños que permitieran trabajar con las etapas factual, procedimental y simbólica de una situación de aprendizaje (aspecto VI). Es decir, hacer un rediseño que, con base en prácticas socialmente compartidas, promoviera que la interacción con la situación comience por la acción de los estudiantes sobre datos manipulables de manera tangible o abstracta, pasando por la construcción de estrategias matemáticas que permitan transitar hacia el trabajo con el conocimiento matemático significado que habilite la escolarización de los conceptos matemáticos.

Teóricamente, esta nueva relación con el conocimiento matemático escolar se produjo a partir de varias acciones realizadas durante el primer encuentro que se fueron desarrollando con base en los elementos característicos que propician el proceso de empoderamiento docente. En primer lugar, se realizó una autocrítica del discurso hablado y de la actividad áulica, aunado al análisis de documentos escolares, es decir, el cuestionamiento de las *estructuras objetivables* del *discurso matemático escolar*, que refiere a la vivencia de la etapa individual o interior del proceso de empoderamiento. Esto, sumado a la etapa colectiva donde, con las y los colegas profesores, durante el encuentro se analizaron resultados de investigación con base en bibliografía especializada relacionada con las dificultades, alternativas de intervención, entre otras; a la vez que se analizó de manera crítica la información disponible, es decir, el reconocimiento de una disciplina de referencia, lo cual se relaciona con la etapa colectiva del empoderamiento docente, promovió la aportación a la comunidad ante el diseño, implementación y análisis de situaciones de aprendizaje por parte de Francisco, lo cual refiere a la etapa social del empoderamiento docente.

Tabla 1.
Teorización del proceso de empoderamiento de la TSME (Reyes-Gasperini, 2016, p. 193)

<table>
<tr><th colspan="4">Teorización del Empoderamiento Docente desde la TSME</th></tr>
<tr><td colspan="3">Cuestionamiento de las estructuras objetivables del dME.</td><td rowspan="2">Etapa Individual o interior</td></tr>
<tr><td>Autocrítica del discurso hablado</td><td>Autocrítica de la actividad áulica</td><td>Análisis crítico de documentos escolares</td></tr>
<tr><td colspan="3">Reconocimiento de una disciplina de referencia</td><td rowspan="2">Etapa Colectiva</td></tr>
<tr><td>Consideración de bibliografía especializada</td><td>Participación activa en espacios de desarrollo profesional</td><td>Análisis crítico de información disponible</td></tr>
<tr><td colspan="3">Aportaciones a la comunidad</td><td rowspan="4">Etapa Social</td></tr>
<tr><td>Trabajos fundamentados teóricamente</td><td colspan="2">Diseño, implementación y análisis de situaciones de aprendizaje</td></tr>
<tr><td colspan="3">Participación en espacios para la pme de colectivos docentes</td></tr>
<tr><td>Diálogo Colectivo</td><td colspan="2">Profesores Turores</td></tr>
</table>

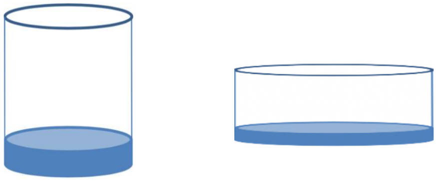
Así, el profesor Francisco está inmerso en un proceso de empoderamiento docente que, gracias a su toma de iniciativa, lo lleva a realizar innovaciones didácticas en su práctica docente a partir de la problematización de la matemática escolar, conjugadas con las actitudes de liderazgo promovidas hacia la transformación de su entorno, en este caso, su acción educativa y el aprendizaje de sus estudiantes.

4. Descripción y análisis de la experiencia

Se trabajó en dos cursos de sexto grado de una secundaria técnica argentina, anteúltimo año de formación, de gestión estatal, con una cantidad de 25 y 26 estudiantes respectivamente, de entre 17 y 19 años, participando en una clase de tres horas tiempo real.

Para comenzar el desarrollo de la clase, se presentó la primera tarea de la situación de aprendizaje denominada "Llenado de recipientes" (PIDPDM, 2016), y sustentada en la investigación de Caballero-Pérez y Moreno-Durazo (2017). La primera tarea, "Rectas llenando vasos", se plantea como sigue.

Tarea 1. Considere recipientes cilíndricos con diferentes dimensiones y con la misma capacidad, que serán llenados con el mismo flujo constante. En la imagen siguiente se muestra la altura que alcanza el cuerpo del líquido al transcurrir un segundo en cada recipiente.



1. ¿Cuántos segundos tardará en llenarse cada recipiente? Justifique su respuesta.
2. ¿En qué se diferencia el crecimiento de la altura del cuerpo del líquido en el recipiente B respecto del recipiente A? Justifique su respuesta.
3. Bosqueje la gráfica que represente el llenado de cada recipiente (la altura del cuerpo del líquido de cada recipiente con respecto al tiempo), en el mismo sistema coordenado.

La situación fue dictada y las imágenes que representaban los recipientes dibujadas en el pizarrón, por lo cual, para la primera pregunta la mayoría de los estudiantes querían tener una proporción de la parte del recipiente que se encontraba llena después del segundo, y así determinar el tiempo que tardarían en llenarse. Ante esta solicitud, el profesor decidió decir que representaba la quinta parte, por lo tanto, todos indicaron que tardarían 5 segundos en llenarse, ambos al mismo tiempo, dado que se indicó en el enunciado que ambos recipientes tenían la misma capacidad.

> *Análisis*. La intención de la pregunta radica en que, ante la carencia de valores numéricos en el dibujo, se promueva la necesidad de construir una unidad de medida. En el caso de los estudiantes, la solicitud sobre la proporción que estaba dibujada refleja dicha necesidad para realizar la comparación con el recipiente completo, estableciendo la relación tiempo transcurrido–llenado realizado. Nótese que ante una tarea que no muestra una función en sus representaciones habituales (algebraica, gráfica o tabular), los estudiantes construyen una de las ideas fundamentales para la construcción del concepto de fracción, razón, proporción y variación, en este caso en particular, función bajo la noción del pensamiento variacional: ¿Qué cambia?, ¿Cómo cambia y por qué cambia?

En la segunda pregunta, algunos dijeron: "*El recipiente A se llenaba más rápido, porque el recipiente B era más gordo, entonces tardaba más*", esto no convenció a muchos y algunos cuestionaron esta idea preguntando: "*¿Entonces no se llenan al mismo tiempo?*". Ante esta pregunta, se volvió a reflexionar y se aseveró: "*No, sí se llenan al mismo tiempo*". Entonces, reformularon la intervención y dijeron: "*Parece que va más rápido porque se llena más alto a medida que pasa el tiempo, pero como es alto el vaso, llegan juntos*". Estas argumentaciones las acompañaban con representaciones con las manos de los segmentos que harían las veces de altura del líquido segundo a segundo.

> *Análisis*. En primer lugar, resulta importante analizar el objetivo de esta pregunta. Su intención fue la de analizar la variación de la altura del llenado respecto del tiempo, habiendo reflexionado anteriormente que el llenado se realizará en el mismo tiempo transcurrido. En particular, pretende confrontar las ideas “se llena más rápido” con la idea de que “la altura crece más rápido” (esto es una descentración del objeto). Hasta este momento, los estudiantes pueden detectar por confrontación de afirmaciones una respuesta que pareciera ser errónea, es decir, considerando que una afirmación contradice lo que acababan de afirmar, es que reformulan la afirmación. Sin embargo, aún faltaría confrontar por qué una u otra afirmación es correcta o no. Para ello, la situación de aprendizaje propone la siguiente pregunta.

La primera cuestión que surgió del grupo al dialogar respecto a la pregunta tres, fue la reflexión sobre la posición de las variables en los ejes cartesianos: “*¿Cuál va en la x y cuál en la y?*”. Casi todos indicaron que, como el enunciado decía *la altura respecto del tiempo*, el tiempo debía ir en el eje *x* y la altura del líquido en el eje *y*, porque: “*La altura del líquido dice que depende del tiempo, que sería x*”. Al momento de analizar las representaciones surgieron algunas variantes.

> *Análisis*. Tradicionalmente, las gráficas suelen estar representadas con sus variables, por tanto, la reflexión de qué variable va en cada eje es algo que los estudiantes pocas veces reflexionan. Por tal motivo, esta pregunta, intrínsecamente, realiza un cuestionamiento sobre la elaboración, lectura e interpretación en la construcción de gráficas.

Los estudiantes participaron escribiendo en el pizarrón realizando sus bosquejos de gráficas (Figura 1). En ese proceso debaten y construyen sobre conjeturas.

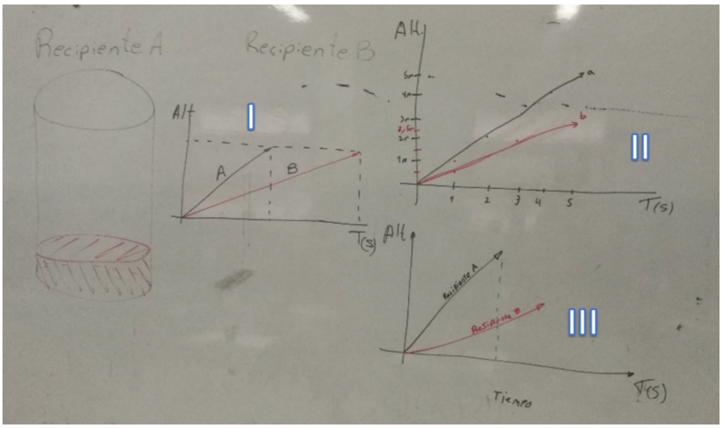


Figura 1. Bosquejo de gráficas de recipientes, pregunta 3, tarea 1.

En los tres bosquejos, en color negro se representa la gráfica correspondiente al recipiente A y en color rojo, la del recipiente B. La gráfica II resultó ser la que casi todos realizaron en sus hojas, exceptuando dos estudiantes que realizaron el gráfico I y III. Al observar las opciones, el que había realizado el gráfico III, indicó que en su mente pensaba en el gráfico II, pero que de "pereza", no lo dibujó tan preciso. El estudiante que realizó el gráfico I, argumentaba que ambas gráficas "*terminan en la misma altura*", dado que ambos recipientes tenían la misma capacidad, a lo cual se le preguntó: "*¿Cuánto tardó en llenarse el recipiente A y cuánto el recipiente B según informa tu gráfico?*" y los compañeros cuestionaban: "*Los tiempos de llenado no serían iguales… si fuera como vos lo dibujas, si yo miro tu gráfico, parece que uno tardó el doble de tiempo en llenarse que el otro*". Otro compañero agregó al trazar la línea punteada vertical en el gráfico I, a los 5 segundos: "*Si no, a partir de este punto, el líquido se estaría rebalsando*".

Análisis. Entre el gráfico I y gráfico II se pude presentar la confusión por la disposición de las variables respecto de los ejes, también que internamente lo que espera observar en el gráfico es el llenado de los recipientes, y no las alturas de llenado, son dos variables distintas, que ambas están en juego en esta actividad, pero solo una es objeto de análisis. La intención que subyace es que los alumnos tracen dos semirrectas, que cada una tenga diferente pendiente, que estará determinada por la razón de cambio entre la altura del líquido y el tiempo transcurrido en el llenado de cada recipiente.

Posterior a esta discusión, se presentó la segunda tarea: "Curvas llenando copas y matraces".

Tarea 2. Considere recipientes con forma de "cono" y "cono invertido", como los que se muestran a continuación, que son llenados al mismo flujo constante.


Recipiente A *Recipiente* B

1. Para el recipiente A, ¿cómo es el crecimiento de la altura en la parte inferior respecto a la parte superior?
2. Para el recipiente B, ¿cómo es el crecimiento de la altura en la parte inferior respecto a la parte superior?
3. Para cada recipiente, proporcione la gráfica que muestre la altura del cuerpo del líquido al paso del tiempo.

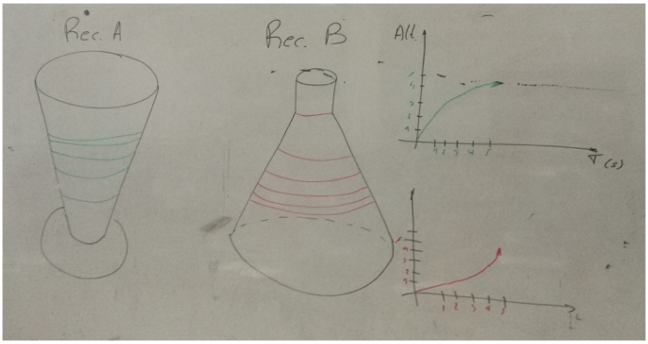


Figura 2. Propuesta 1 de bosquejo de gráficas de recipientes, tarea 2.

Para responder a las dos primeras preguntas, los estudiantes no parecían tener inconvenientes, e indicaban como obvias las respuestas. En el recipiente A sería cada vez menor la diferencia en el aumento de altura alcanzada por el líquido, mientras que en recipiente B, iría aumentando la diferencia de la altura. Para ambas situaciones, surgió la idea de que se llenaban más rápido o más lento, hasta que entre ellos mismos se criticaban haciéndose recordar que la velocidad de llenado siempre era constante. En el gráfico intentaron representar lo que serían las alturas al paso del tiempo, en el caso del recipiente B, el estudiante que lo dibujó dijo: "*Arranqué a marcar los de arriba, porque los de abajo quedaban muy apretados y no se iban a ver*".

> *Análisis*. En este caso, los dibujos de los estudiantes permitían representar lo que coloquialmente decían como "la altura aumenta cada vez más rápido o cada vez más lento", lo que se interpreta como el análisis del cambio y la variación y la variación sucesiva, posteriormente, se profundiza el análisis de la variación del fenómeno.

Respecto de los gráficos, hubo un estudiante que los trazó al revés, aunque señaló que se había confundido, pero se fueron dando algunos interrogantes no esperados. En el gráfico que representa el llenado del recipiente A, realizado con color verde, se produjo la siguiente interacción:

> *Estudiante 1*: Si pudiera continuar llenado, si fuera más alto, ¿el gráfico continuaría con una línea horizontal?"
>
> Nadie respondió y todos parecían estar muy atentos a su suposición. Como nadie aportó comentario, intervino el profesor.
>
> *Profesor*: Si continuara de manera horizontal, por como tu compañero hizo el gráfico, pareciera que siguiera así. De hacerlo, ¿estaría bien?, ¿qué significaría si siguiera de manera horizontal?"
>
> Silencio.
>
> *Estudiante 2*: Pero… si el gráfico fuese horizontal, ¿no sería que no está agregando nada de líquido? Sino tendría que subir como subiría el nivel del líquido.

Esta última intervención, concluyó en una puesta en común, un proceso consensuado, entre las y los estudiantes, que se trataba de una interpretación errónea de un gráfico pues era algo aproximado, con base en el análisis de lo que sucedería con el líquido del recipiente y su comportamiento.

> *Análisis*. En primer lugar, se enfatiza en la pregunta que realiza el profesor para intervenir: ¿Qué significaría si siguiera de manera horizontal? Este tipo de intervención promueve la argumentación de los estudiantes, pues más allá de considerar que es correcta o incorrecta su respuesta, vuelve a la situación contextual planteada y pregunta sobre el significado que tendría en el fenómeno un hecho particular, que la gráfica tuviera este comportamiento. En esta intervención está realizando una dialéctica entre la significación de la gráfica mediante y el contexto usado en la situación. Así es que el estudiante 2 recurre al fenómeno para dar respuesta.

Otro estudiante dijo que los hizo a ambos en el mismo sistema de ejes, como en la tarea anterior (Figura 3).

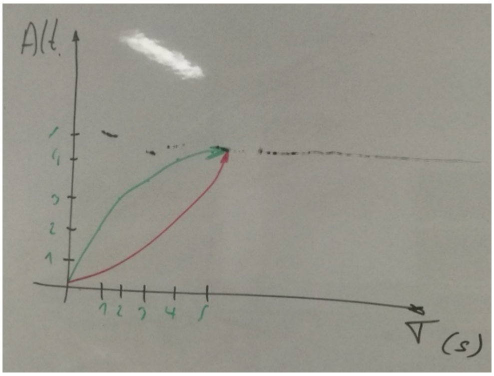


Figura 3. Propuesta 2 de bosquejo de gráficas de recipientes, tarea 2.

Algunos le dijeron que no se podía hacer eso, que ambas gráficas lleguen al mismo punto, entonces el profesor Francisco intervino y preguntó: "*¿Por qué no?*". Respondieron que faltaban datos. La decisión del profesor fue esperar a que desarrollasen un poco más esa idea y continuó diciendo, que antes cortaban juntas, las dos gráficas (en el mismo valor de tiempo) porque el enunciado decía que tenían el mismo volumen, y si las llenaban a la misma velocidad, llegaban juntas. Entonces, por las dudas, pregunté: "*¿Qué tendría que pasar para que esa representación valga?*". No dudaron en decir que deben tener igual capacidad.

> *Análisis*. La intencionalidad de repreguntar, en lugar de ofrecer la respuesta, era la de propiciar un espacio de debate donde los mismos estudiantes sean los protagonistas y que tengan que poner en juego las construcciones realizadas hasta ahora, y establecer algunas otras para poder sostener la argumentación frente a sus pares y con el docente. Las respuestas de los alumnos pondrían en evidencia la capacidad interpretativa que han logrado desarrollar frente a una representación

gráfica contextualizada por una situación problemática dada, como pueden pasar de un enunciado a un gráfico y como entonces poder realizar el trayecto inverso y transitar de un gráfico dado a redactar un enunciado nuevo que le corresponda.

Otra idea que surgió fue la de tomar el recipiente B y que siguiera *infinitamente* dijo uno de los estudiantes a lo cual, un compañero le respondió que eso no podía ser, porque: "*En algún momento se va a hacer tan finito que se tapa*". Bueno, retrucó: "*Antes que se cierre, que se mantenga angosto, como si fuera una pajita (sorbete)*", hizo una pausa, "*¿Cómo seguiría el gráfico?*". El profesor Francisco esquivó intencionalmente la pregunta indicando que entonces, ya no podían terminar en el mismo punto las dos gráficas, a lo cual la mayoría asintió: "*Si, si, ya sé, pero en ese punto seguiría derecha la gráfica, ¿No?*". Silencio. Otro compañero respondió que si fuera derecha, no pasaría el tiempo, haciendo referencia que imagino derecha, de manera vertical, entonces corrigió e indico que debía ser recta, y redobló, asegurando que sería casi vertical, estando parado en el pizarrón, mostraba que al ser de sección angosta, las alturas serían muy grandes, logrando convencer a todos de esta idea.

Análisis. En este punto, acompañando esta posible reestructuración del enunciado, se puede observar que las conclusiones abordadas en la primer actividad cuando se trabajó con recipientes cilíndricos, les provee del sustento para afirmar que sucedería si ocurriera lo supuesto, y asegurando de que se trataría de una recta con una pendiente pronunciada, permitiendo suponer que se está pensando en esta razón de cambio, donde la diferencia de altura del líquido es considerablemente mayor a la unidad de tiempo.

Se presenta entonces, para terminar la clase, la tercera tarea: "Cuadrando números".

Tarea 3. Las siguientes tablas muestran los valores de la altura del cuerpo del líquido en tres recipientes llenados a flujo constante:

Recipiente E

Tiempo (s)	**Altura (cm)**
2	**1.7**
4	**3.2**
6	**4.6**
8	**5.7**
10	**6.5**

Recipiente F

Tiempo (s)	**Altura (cm)**
1	**1.1**
3	**3.4**
5	**6.3**
7	**9.8**
9	**13.7**

Recipiente G

Tiempo (s)	**Altura (cm)**
3	**2.7**
6	**5.4**
9	**8.1**
12	**10.8**
15	**13.5**

¿Cuál recipiente corresponde al llenado de un cilindro?, ¿Por qué?

Nadie presentó problemas para decir que el recipiente G era un cilindro, pero las justificaciones fueron diferentes. Al empezar a resolver, algunos preguntaron si podían graficar los datos de la tabla, y se les solicitó que trataran de evitarlo si podían. Esto, con el fin de analizar las variaciones en la representación tabular y no en la gráfica, para poder analizar ambas y favorecer la aparición de la razón de cambio.

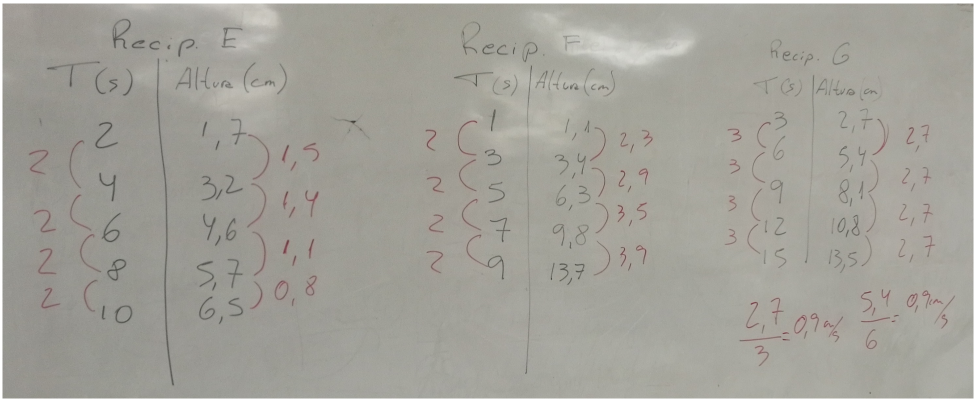


Figura 4. Argumentaciones de las diferencias en el pizarrón, tarea 3.

Casi todos calcularon las diferencias entre los valores presentados de la tabla. Muy pocos realizaron el cociente entre la altura y el tiempo, pero al ver que uno le colocó las unidades, otros dijeron que eso entonces era la velocidad, porque estaba en cm/s, y como las diferencias siempre se mantenían constantes, ese tenía que ser el cilindro y, además, para que el gráfico fuese una recta. En este punto, un estudiante quiso poner un contraejemplo a lo que se venía argumentando, respecto de que si la diferencia fuese 3 – 2,7 propuso: "*Si en vez de tener el dato de que a los 15 la altura es de 13,5, ¿me dicen que a los 14 la altura es de 12,6? La constante ya no es 3, pero sigue siendo un cilindro*". Entonces discutieron que en realidad la constante era 0,9, que es el resultado del cociente.

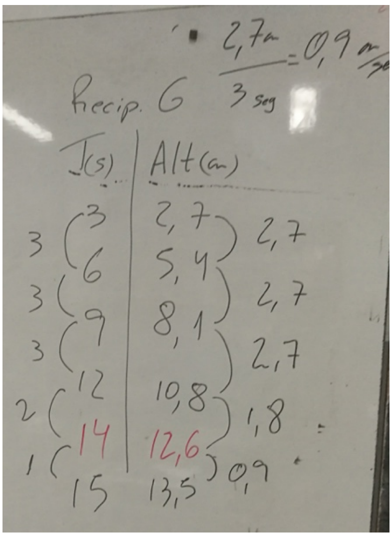


Figura 5. Argumentaciones de las diferencias en el pizarrón, tarea 3.

Análisis. Este supuesto, proporcionado por un estudiante, propicia el debate y permite robustecer la idea de razón de cambio, idea que ya se veía firme al contrastar entre las tres tablas propuestas, pero poder concluir que se puede intercalar valores, por fuera de ese patrón que se venía observando, da indicios de las construcciones que están desarrollando los alumnos internamente y explicitan en las discusiones.

5. Reflexión teórica sobre el análisis de datos

Los datos que arroja la experiencia serán explicados a la luz de los enfoques teóricos asumidos. En primer término, diremos que según Cantoral (2013), no siempre se encuentra al alumnado en situación de aprendizaje de ahí que se produzca intencionalmente el conflicto cognitivo para recrear la situación, proponiendo una tarea situada que enfrente al estudiante con un escenario en el que debe poner en juego su conocimiento, aunque, sobre todo, que lo requiere para encarar un desequilibrio cognitivo que le exija usar el conocimiento en la tarea. La elaboración de la tarea la realizó el equipo de PIDPDM como un medio situado en el que prácticas variacionales pueden entrar en juego, pero la elección de su implementación obedeció con fines del empoderamiento. Como respuesta a una solicitud personal, se le propuso una situación de aprendizaje a Francisco para su análisis y revisión, sin embargo, con su experiencia y expectativas, decidió ponerla en escena y modificarla parcialmente por el mismo. Esta señal es una primera muestra de empoderamiento.

El reto mayor con los diseños, desde el punto del empoderamiento docente, es justamente su adecuada articulación entre las intenciones del profesor con las pretensiones de la situación de aprendizaje. Es decir, que pudieran quedar bajo el control del docente, desde el punto de vista de la aspiración didáctica, motivar y aprender vía la enseñanza. En este caso, se trataba de discutir el tema función para terminarlo con su derivada, pero el docente sabía, por experiencia propia, que el tema resultaba poco atractivo o, en definitiva, “aburrido” para los estudiantes en virtud de su carga simbólica y representacional clásica (algebraica, numérica y gráfica), de manera que un diseño alterno, cercano a las experiencias de vida cotidiana de las y los estudiantes, podría ser una buena oportunidad para intentarlo, en lugar de continuar con su anterior estrategia que era meramente explicativa de la técnica, y un conjunto de actividades de aplicación, que no siempre le garantizaba que el alumnado lograse alcanzar el entendimiento del concepto subyacente en esa técnica.

Así, *motu propio*, el docente pide a su colaborador, un diseño sobre el tema (objeto matemático) función y derivada. Lo evalúa, aplica y progresivamente descubre que el alumnado pone en funcionamiento elementos del pensamiento matemático de naturaleza variacional que eran sorpresivos para el propio docente, pero no sólo eso, sino que le declaran explícitamente que les hubiese gustado estudiar de este modo en su paso por la escuela. Tal situación de sorpresa lleva a Francisco a construir un diálogo informado con el PIDPDM, para saber si el éxito de la aplicación es reproducible o contingente.

El episodio "rectas llenando vasos", deja ver con toda claridad que el sentido de la representación favorece la emergencia de la variación en forma verbal y gestual, con apoyo en datos numéricos – medidas propiamente dicho. Progresivamente se trata la comparación de estados, la secuenciación de procesos para dar lugar a una predicción. Evoluciona también de lo factual a lo procedimental cuando se discute el tema de la pendiente de las rectas representativas. En los debates sobre la predicción final (misma altura o mismo volumen) se dejan ver "desajustes" en las interpretaciones de las representaciones, pero es la práctica de llenado, hipotética o realista, la que les permite a las y los estudiantes, en el curso de debates fundados decidir una ruta de solución. El profesor muestra una evolución en su propio proceso de empoderamiento, pues decide dosificar sus intervenciones con el fin de hacer emerger construcciones propias de los estudiantes (ponerse en los pies del otro). Decide participar o se abstiene de ello, deja el control a la situación.

En los episodios siguientes "curvas llenando matraces y copas" aparece de parte de los alumnos la necesidad de la variación sucesiva, esta crece, pero cada vez crece más; mientras que esta otra, crece también, pero crece cada vez menos. Este logro da cuenta de que el conflicto planteado fue superado al nivel procedimental, sin saberlo, la gestión áulica del docente permite la aparición de un teorema, primera derivada positiva y segunda derivada positiva, se trata de una curva cóncava hacia arriba. Recíprocamente, primera derivada positiva, con segunda derivada negativa, se trata de una curva cóncava hacia abajo. Sin embargo, el verdadero resultado es, juntamente con los anteriores, que las dos curvas coinciden en su mínimo y en su máximo cuando el volumen del recipiente es el mismo, esto pone en evidencia que la transversalidad del hallazgo ha superado a la variable funcional puesta en juego (altura o volumen). Su temporización (distribución en el tiempo de medidas intermedias) estableció un nuevo sistema de referencia, que no sería el plano cartesiano en sí, sino un sistema móvil colocado sobre la propia gráfica, pues la variación de la variación es un constructo de segundo orden.

En el episodio último, "cuadrando números", se busca confirmar el proceso reversible – condición de certeza del aprendizaje y de los principios del arribo de la etapa simbólica. Las respuestas de los estudiantes y el control de la situación del docente muestran que las dinámicas del empoderamiento no sólo permitieron a Francisco una gestión diferente de la clase, sino que propiciaron el aprendizaje a la vez que fortalecieron las habilidades socioemocionales. Pero lo más relevante fue, en nuestra opinión, que la relación al conocimiento ha sido cambiada por las acciones reflexivas del profesor en el marco de la situación de aprendizaje puesta en escena. Su propio conocimiento se fortalece con las reflexiones en los debates de sus estudiantes

6. Conclusiones

Este artículo pone en evidencia el papel del empoderamiento docente en la ganancia cognitiva y en la inclusión social, con base en resultados experimentales de una intervención educativa sustentada en prácticas socioculturales que favorecen un aprendizaje significativo de las matemáticas, siempre con el recurso de los conflictos cognitivos y una secuencia de tareas.

Asimismo, la investigación se basó en la teoría socioepistemológica sobre el pensamiento variacional. El foco del diseño no estuvo en el objeto matemático per se, sino en el sistema de prácticas socialmente compartidas. La configuración experimental ofreció la oportunidad de abordar el empoderamiento docente y el desarrollo del pensamiento variacional por parte de los estudiantes, desde un paradigma pragmático de las matemáticas y de los procesos de enseñanza-aprendizaje. Esto brinda un nuevo entendimiento de la relación entre la práctica docente y la actividad matemática de los estudiantes.[2]

Se planteó un estudio de empoderamiento docente a partir de la intervención realizada libremente por un profesor de nivel secundario en Argentina, al trabajar en una clase de sexto año de una escuela técnica. En esta experiencia, se pusieron de manifiesto las etapas de una construcción social del conocimiento matemático de parte de las y los estudiantes ante una situación de aprendizaje. Al momento de responder a un conjunto secuenciado de tres tareas, con una serie de actividades que se guiaban en el marco de una situación de aprendizaje basada en la socioepistemología, se nota la presencia de una evolución pragmática, en un contexto situacional del estudiante, el llenado de recipientes de forma diversa (lados rectos verticales u oblicuos). La literatura reporta una confusión de los estudiantes entre la forma del recipiente y la gráfica producida de la función *altura* versus *tiempo*. Sin embargo, en este diseño esto no ocurre por dos razones principales:

- Razón 1. El proceso de empoderamiento que vive el profesor en cuestión, con acompañamiento colaborativo.
- Razón 2. El diseño basado en prácticas, que descentraliza al objeto matemático *función derivada*.

De esta manera, el discurso del profesor en el aula se construye y reconstruye en el contexto del diseño de la situación de aprendizaje (articulación adecuada entre la razón 1 y la razón 2). Más específicamente, el profesor abandona un discurso centrado en objetos, para aceptar otro ubicado en prácticas que, a su

[2] Agradecemos a las/los revisores de esta propuesta por alcanzar una mirada sintética del artículo con tanta nitidez conceptual.

vez, él mismo vivió en las sesiones presenciales del programa PNAM. Esto exige de su parte una muestra explícita del empoderamiento, al construir sus intervenciones didácticas, recontextualizando y eligiendo apropiadas relaciones entre gráfica, número y sentido contextual. Este hecho ha sido documentado por diferentes autores como Reyes-Gasperini (2016), Freire y Shor (1986), Santana, Serrazina y Nunes (2018) y Bernstein (2000). Específicamente, Bernstein (2000) señala al respecto:

> But I want to argue that the crucial space which creates the specialization of the category – in this case the discourse – is not internal to that discourse but is the space between that discourse and another. In other words, A can only be A if it can effectively insulate itself from B. In this sense, there is no A if there is no relationship between A and something else. The meaning of A is only understandable in relation to other categories in the set; in fact, to all the categories in the set. In other words, it is the insulation between the categories of discourse which maintains the principles of their social division of labour. In other words, it is silence which carries the message of power; it is the full stop between one category of discourse and another; it is the dislocation in the potential flow of discourse which is crucial to the specialisation of any category. (Bernstein, 2000, p. 6)

El discurso del profesor ante la situación variacional trata de alturas, pero es trasladado hacia otro relativo más complejo sobre el volumen, es decir, su especialización se alcanza cuando se crea un espacio entre los dos discursos. Digamos que el discurso sobre alturas será justo eso en la medida en que se distinga del discurso sobre el volumen.

Seguramente la capacidad de ponerse en los "zapatos del otro" ya habían sido desarrollados por el profesor en su vida misma, o en su vida como docente. Aunado a ello, el diseño basado en empoderamiento le permitió su utilización legítima en las clases habituales. De ahí que sus alumnos dijeran expresiones motivacionales hacia él mismo, por ejemplo, como Francisco relata él en el diálogo informado:

> Este mismo alumno es un alumno que es repetidor, y exalumno mío del año anterior, antes de volver a su lugar, me preguntó en confidencia: "*¿Por qué el año pasado, no explique así lo de límites y del infinito?*". No pude hacer otra cosa que sonreír y darle las gracias.

Por otro lado, el empoderamiento docente, en tanto proceso, favorece el aprendizaje del alumnado. En este sentido, su logro se materializa en dos planos, por un lado, en el proceso de formación continua del profesorado y por otro, en el proceso de aprendizaje basada en la enseñanza basada en prácticas socialmente compartidas (Reyes-Gasperini, 2016).

Referencias bibliográficas

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identity: Theory, research, critique*. Oxford: Rowman & Littlefield Publishers.

Caballero-Pérez, M., & Moreno-Durazo, A. (2017). Diseño de una situación de aprendizaje para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. In L. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 1066–1074). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa: Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R. (2019). *Sobre el origen del p*. La trilogía: variación sucesiva, hipótesis abductiva y pequeña variación*. Manuscrito enviado para publicación.

Freire, P., & Shor, I. (1986). *Miedo y osadía: Lo cotidiano del profesor*. Madrid: Siglo XXI Editores.

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. (2018). *Marco Nacional para la Mejora del Aprendizaje en Matemáticas*. Buenos Aires: Secretaria de Innovación y Calidad Educativa.

Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología. (2019). *Plan Nacional Aprender Matemática: Predecir*. Buenos Aires: Secretaría de Innovación y Calidad Educativa.

Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas. (2016). *Programa interdisciplinario para el desarrollo profesional docente en matemáticas*. http://www.pidpdm.mx

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y socioepistemología: Un estudio sobre la transformación educativa en matemáticas.* Barcelona: Gedisa.

Santana, E., Serrazina, L., & Nunes, C. (2018). Contribuições de um processo formativo para o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *22*(1), 11–38.

Soto, D., & Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión: Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1525–1544.

Un effetto del contratto didattico: Immaginare obblighi impliciti (anche in problemi che chiamano in causa situazioni reali concrete)

An effect of the didactical contract: Imagining implicit requirements (even in problems that involve real concrete situations)

Bruno D'Amore[1,2] e Martha Isabel Fandiño Pinilla[2]

[1]*Doctorado Interinstitucional en Educación, Énfasis Educación Matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia*

[2]*Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia*

Alla ricerca hanno collaborato: Anna Angeli, Mariamonica Cappelli, Margherita Francini, Ines Marazzani, Annarita Monaco e Malvina Nurrito.

Abstract. *In this text, we present an effect that, in our opinion, has not been yet pointed out in the studies regarding the didactical contract. We carried out a recent research on this effect in Italy that involved teachers and grade 5 students. The effect stems from imagining requirements, which do not exist, based on explicit or implicit agreements regarding the meaning of school problem and its text. We will call this effect: "imagining implicit requirements". The examples we propose are linked to the concreteness of real situations, even though this is hardly ever recognized. Such a state of affairs allows us to draw some remarks concerning the so-called "authentic tasks", a term that appears in ministerial documents and the Italian didactical practice.*

Keywords: didactical contract, effect, authentic tasks, problem-solving, text problem interpretation.

Sunto. *In questo testo si presenta un effetto a nostro avviso mai segnalato negli studi sul contratto didattico, effetto che è stato oggetto di una recente ricerca compiuta in Italia su insegnanti e su allievi di V primaria. L'effetto scaturisce dall'immaginare obblighi, che in realtà non esistono, basati su accordi espliciti o impliciti relativi al significato di problema scolastico e al suo testo. Lo chiameremo: "immaginare obblighi impliciti". Gli esempi proposti sono legati alla concretezza di situazioni reali, anche se ciò non viene quasi mai riconosciuto, il che ci consente alcune considerazioni relative ai cosiddetti "compiti di realtà" la cui denominazione appare in documenti ministeriali e nella pratica didattica in Italia.*

Parole chiave: contratto didattico, effetto, compiti di realtà, problem solving, interpretazione dei testi dei problemi.

Resumen. *En este texto presentamos un efecto que creemos no se ha puesto en evidencia en los estudios sobre el contrato didáctico, un efecto que ha sido objeto de una investigación reciente llevada a cabo en Italia en la cual participaron profesores y estudiantes del quinto grado de primaria. El efecto se deriva al imaginar obligaciones, que en realidad no existen, basadas en acuerdos explícitos o implícitos relacionados con el significado del problema escolar y de su planteamiento. Lo llamaremos: "imaginar obligaciones implícitas". Los ejemplos presentados están relacionados con la concreción de situaciones reales, también si esto casi nunca se reconoce, lo que nos permite hacer algunas consideraciones relacionadas con las llamadas "tareas de realidad" cuyo nombre aparece en los documentos ministeriales y en la práctica docente en Italia.*

Palabras clave: contrato didáctico, efectos, tareas cotidianas, problem solving, interpretación del texto de un problema.

1. Il contratto didattico

Quando si cerca di datare la comparsa ufficiale dell'idea di "contratto didattico" nel mondo della ricerca, in quella che poi, negli anni '80, verrà chiamata *didattica della matematica* (DdM), si cade in una difficoltà non banale. Il problema è dovuto al fatto che le prime pubblicazioni su questo tema avvennero in modo frammentario, su testi a volte solo ciclostilati, in occasione di incontri non del tutto ufficiali, il più delle volte privi di Atti, o su riviste spesso poco legate alla matematica e alla sua didattica. Abituati come siamo oggi a riviste specialistiche perfettamente organizzate e ad Atti di convegni precisamente citabili, facciamo fatica anche solo a rintracciare i testi originali su questo tema.

Ma la storia è talmente nota e l'argomento talmente conosciuto che ci esimeremo dal trattarne ancora; accetteremo come fanno in molti il 1986 come l'anno del tentativo di definire questo tema di analisi e ricerca da parte del suo geniale ideatore (Brousseau, 1986), anno che dà il via ufficiale alla DdM modernamente intesa.

Proprio questa datazione così lontana nel tempo (quasi 40 anni) fa sì che alcuni principianti poco colti o alcuni detrattori superficiali spesso in malafede considerino questo argomento come superato (per un'analisi critica su questo punto si veda: D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013).

Noi vogliamo invece difendere la posizione seguente: così come in matematica accade spesso che temi classici siano da rivedere e rinvigorire per mostrarne la sempre viva potenza scientifica, lo stesso accade anche in DdM (si vedano, per esempio, D'Amore & Fandiño Pinilla, 2018a, b).

Proporremo dunque in questo scritto un'analisi-ricerca compiuta fra il 2018 e il 2019, consapevoli del fatto che l'idea di contratto didattico non sia ancora del tutto conosciuta, di come spesso la si citi in maniera impropria o sbagliata, solo per sentito dire, di come a volte sia difficile definirla e determinarla e di come ci sia ancora bisogno di ricerca sperimentale dato che, come dice e scrive lo stesso Guy Brousseau, a fronte dell'incredibile successo planetario di questa idea negli anni '80 e '90, la vera ricerca empirica esplicita su questo tema è relativamente scarsa (Narváez Ortiz, 2017, p. 184). Tanto è vero che riteniamo necessario che ancora vi siano ricerche a carattere dottorale su questo tema (Narváez Ortiz, 2017) e che, dovendo indicare ai neofiti che cosa studiare in proposito, preferiamo citare testi recenti (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2018) piuttosto che quelli classici degli anni '80 o primi '90 (a loro volta ivi citati con dovizia di particolari).

2. I "compiti di realtà"

Vi è un'ulteriore tema che vogliamo illustrare qui brevemente e che gioca un ruolo interessante nient'affatto marginale in questa nostra ricerca.

Nella prassi didattica italiana si parla da alcuni anni, con una terminologia oramai diffusa che non possiamo che accettare, anche se ci appare poco elegante, dell'idea di "compiti di realtà" (cdr). Essa è delineata per esempio all'interno della Circolare MIUR 13.02.2015, n. 3: "Adozione sperimentale dei nuovi modelli nazionali di certificazione delle competenze nelle scuole del primo ciclo di istruzione"; e in particolare nell'allegato: "Linee guida per la certificazione delle competenze nel primo ciclo di istruzione" (MIUR, 2015). All'interno del paragrafo 2.5 ("Gli strumenti per valutare le competenze"), si trova scritto:

> È ormai condiviso a livello teorico che la competenza si possa accertare facendo ricorso a compiti di realtà (prove autentiche, prove esperte, ecc.), osservazioni sistematiche e autobiografie cognitive. I compiti di realtà si identificano nella richiesta rivolta allo studente di risolvere una situazione problematica, complessa e nuova, quanto più possibile vicina al mondo reale, utilizzando conoscenze e abilità già acquisite e trasferendo procedure e condotte cognitive in contesti e ambiti di riferimento moderatamente diversi da quelli resi familiari dalla pratica didattica. Pur non escludendo prove che chiamino in causa una sola disciplina, si ritiene opportuno privilegiare prove per la cui risoluzione l'alunno debba richiamare in forma integrata, componendoli autonomamente, più apprendimenti acquisiti. La risoluzione della situazione-problema (compito di realtà) viene a costituire il prodotto finale degli alunni su cui si basa la valutazione dell'insegnante. (p. 7)

I problemi che si vogliono ascrivere alla categoria cdr, dunque, non dovrebbero essere quelli usuali da tempo immemorabile proposti agli allievi di scuola primaria [in generale, più esercizi che problemi (Fandiño Pinilla, 2008, pp. 66–71)], ma problemi "veri" che propongono situazioni vicine alla realtà o descrittive di un qualche aspetto della realtà nelle quali l'allievo deve agire con scelte proprie, usando sì gli strumenti della matematica, ma intervenendo sulla realtà concreta della situazione problematica, più che sulle sue apparenze standard; cioè non facendo uso solo di scelte stereotipate e algoritmi, ma mettendo in gioco la propria interpretazione personale della situazione problematica descritta dal testo.

3. Le nostre proposte di problemi aventi a che fare con il contratto didattico e con i "compiti di realtà"

Abbiamo ideato i seguenti tre testi di problemi da proporre a fine scuola primaria; nel loro complesso, il lettore vedrà fra poco perché li abbiamo denominati in genere "Che cosa conviene fare".[1]

Problema 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

Problema 2.

Il signor Gigino vuole imbiancare il suo garage; ha un po' di esperienza e sa che gli serviranno esattamente 10 litri di vernice. Va nel negozio Arcivernice (negozio A) e vede che lì vendono la vernice solo in barattoli da 4 litri; ogni barattolo costa 18 euro. Poi va nel negozio Bellavernice (negozio B) e vede che lì vendono la stessa vernice solo in barattoli da 3 litri; ogni barattolo costa 15 euro. Come gli conviene comprare la vernice? Quanto spenderà il signor Gigino?

Problema 3.

Pierino vuole andare a fare i compiti dalla sua amica Camilla: in due si fa prima e s'impara di più; e poi ci si diverte! Ci sono due strade che passano da casa sua e da casa di Camilla, via Garibaldi e via Roma, tutte e due un po' tortuose, ma assolutamente piatte. Ecco la mappa [Figura 1]. *Controllala bene: su ogni tratto di strada sono scritte le lunghezze in metri:*

- *la via Garibaldi misura 200 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 800 m dalla rotonda fino a casa di Camilla;*
- *la via Roma misura 750 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 100 m dalla rotonda fino a casa di Camilla.*

[1] Per correttezza, dichiariamo che il primo testo ci è stato ispirato dalla lettura dell'articolo Knijnik (2018); in tale articolo quel testo aveva tutt'altro scopo.

Figura 1. Mappa del problema 3.

Quale percorso conviene fare a Pierino?[2]

Facciamo notare esplicitamente che abbiano deciso di non far uso di numeri con la virgola, che pure sono trattati nella V primaria italiana, per non rendere inutilmente difficoltosi i problemi, dato che il nostro interesse era quello di esaminare le modalità di risoluzione dei problemi stessi e non la capacità nell’impostare le risoluzioni. Dunque tutti i numeri che appaiono nei tre testi sono naturali.

Prima di procedere e affinché il seguito del nostro testo abbia maggior senso, invitiamo il lettore a soffermarsi sui testi precedenti, dando la propria risposta e annotandosela a parte, meglio se accompagnata da alcuni appunti sulle motivazioni che lo hanno portato a darla. Gli appunti personali servono a non dimenticare quale è stata la prima reazione-risposta personale data in

[2] Il disegno, in varie forme, dimensioni e colori, è opera del disegnatore professionista Michele Bosco, che ringraziamo per la collaborazione.

modo spontaneo a tali problemi.

Nel par. 4 faremo alcune considerazioni di natura didattica concreta relative a qualcosa che chiameremo "tipologia dei problemi di matematica" tipici della scuola primaria, desumendole da colloqui con i docenti di scuola primaria e da risposte date a precedenti esperienze di ricerca. Nel par. 5 proporremo l'analisi dei testi oggetto della ricerca. Nel par. 6 presenteremo le domande cui si vuole dare risposta con la ricerca. Nel par. 7 illustreremo la metodologia di ricerca. Nel par. 8 esporremo i risultati della ricerca. Nel par. 9 formuleremo le risposte alle domande di ricerca. Nel par. 10 presenteremo alcuni esempi di protocolli con brevi commenti. Nel par. 11 trarremo alcune conclusioni.

4. Il problema della tipologia dei problemi d'aula

In D'Amore e Fandiño Pinilla (2013) proponiamo alcune considerazioni fatte da docenti di scuola primaria relativamente a quelle che sono state individuate da essi come tipologie di "problemi attesi" e considerati "tipici" della prassi scolastica. In tale testo si esaminano alcuni risultati ottenuti nelle prove Invalsi destinate agli studenti delle classi quinte di scuola primaria nell'anno scolastico 2008–2009; in particolare si esamina la seguente proposta:

> D9. Maria, Renata e Fabio misurano a passi la lunghezza della loro aula. Maria conta 26 passi, Renata ne conta 30 e Fabio 28. Chi ha il passo più lungo?
>
> □ A. Renata.
>
> □ B. Fabio.
>
> □ C. Maria.
>
> □ D. Non si può sapere.

Circa il 50% degli studenti dà la risposta attesa (C); dunque, per converso, circa il 50% *non* la dà. Nell'esaminare possibili cause di questa mancata risposta, abbiamo naturalmente chiesto ai docenti di scuola primaria una loro spiegazione. La più ricorrente è stata quella che, espressa in vari modi, verrà da noi citata qui di seguito esattamente così esplicitata da un docente in maniera molto significativa (la possiamo considerare assai condivisa): "Noi i bambini li abituiamo a certe situazioni problematiche, e in quelle loro sono bravi e competenti; poi arrivano queste [sottointeso: prove] e loro non le riconoscono" (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013, p. 44).

Così commentavamo in quello stesso articolo: "Dunque, esistono 'situazioni problematiche costruite secondo un certo accordo fra bambini e insegnanti' e 'situazioni problematiche diverse da quelle, dunque inattese' (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013, p. 44).

In base a ciò, dunque, il contratto didattico non è solo creato da ripetizioni nei modi di fare dei docenti, ma appositamente istituito in una sorta di accordo talvolta esplicito o quasi: Tu impara a risolvere i problemi fatti così e così; il tuo impegno verrà premiato perché io ti darò sempre e solo problemi fatti così e così.

L’allievo NON impara a risolvere problemi dunque, impara solo a ripetere in modo automatico modalità concordate con il docente. Anzi, è autorizzato a non sapere come impegnarsi in una risoluzione, quando il problema non è della tipologia concordata.

Non commentiamo questa situazione perché ci pare che non ne valga la pena; d’altra parte rientra nelle casistiche tipiche studiate nel contratto didattico. Ma mettiamo in evidenza questi fatti per spiegare il perché, nel voler effettuare prove su testi problematici, abbiamo voluto dar loro la parvenza di testi che rientrino nella categoria di quelli concordati:

- dati numerici, domanda esplicita, scelta di un’operazione molto evidente da eseguire,
- esecuzione dell’operazione, risposta alla domanda del problema.

Il nostro scopo di ricerca, infatti, non voleva essere la capacità di risolvere problemi, ma l’analisi del ruolo che gioca un nuovo effetto del contratto didattico, che rivela come il solutore creda di ravvisare obblighi non detti nel testo del problema nonostante il testo del problema spinga a dare una risoluzione non contrattuale. Chiameremo questo effetto: “immaginare obblighi impliciti”.

5. Analisi dei testi sulla base del contratto didattico e dell’idea di “compito di realtà”

5.1. Il contratto didattico

Prima di affrontare la ricerca vera e propria, com’è nostra usuale abitudine, abbiamo eseguito alcune pre-prove empiriche, i cui risultati non abbiamo incluso nella presentazione dei risultati finali, solo per saggiare e poi opportunamente modificare i testi dei problemi da proporre.

Abbiamo avuto ampio riscontro dei seguenti fatti, che evidenzieremo, legati a questioni attinenti all’effetto “immaginare obblighi impliciti”.

5.1.1. Problema 1

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l’acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

La risposta che ci sembrava più accettabile sul piano concreto e logico dal punto di vista reale è la seguente (o una analoga):

Risoluzione 2 (creativa)
A Nonna Rosa conviene comprare i 2 kg di albicocche nel banco B e i 3 kg di pesche nel banco A; in tal modo spenderà: $3\times1+2\times1=3+2=5€$.

Ma la risposta che ritenevamo sarebbe stata quella più proposta è del tipo:

Risoluzione 1 (contrattuale)
Spesa in A: $2\times2+1\times3=4+3=7€$
Spesa in B: $1\times2+2\times3=2+6=8€$
Siccome 8 > 7, conviene fare la spesa nel banco A.
Nonna Rosa spenderà 7 €.

La motivazione di questa nostra attesa è legata al contratto didattico; per abitudine ripetuta, per supposta attesa da parte dell'insegnante, il risolutore sarà portato a non prendere in esame la possibilità che la spesa possa avvenire in due banchi di frutta diversi. La domanda del problema 1 recita:

- *Come* è più conveniente fare l'acquisto?

ma il risolutore tenderà a interpretarla come segue, per abitudine contrattuale:

- *Dove* è più conveniente fare l'acquisto?

Non si tratta di una forma usuale del manifestarsi del contratto didattico, ma di una sua forma più subdola, nascosta tra le pieghe delle norme stabilite relativamente alla tipologia di problemi proposti e attesi. Ci pare che questa risposta sia legata a quell'effetto che chiamiamo "immaginare obblighi impliciti". Qui l'obbligo implicito è quello che sembra emergere da accordi impliciti: "si *deve* effettuare la spesa nello stesso negozio" che sembra a sorpresa caratterizzare l'idea stessa di problema. Lo ritroveremo in modo esplicito nelle risposte date al problema 1.

5.1.2. Problema 2

Il signor Gigino vuole imbiancare il suo garage; ha un po' di esperienza e sa che gli serviranno esattamente 10 litri di vernice. Va nel negozio Arcivernice (negozio A) e vede che lì vendono la vernice solo in barattoli da 4 litri; ogni barattolo costa 18 euro. Poi va nel negozio Bellavernice (negozio B) e vede che lì vendono la stessa vernice solo in barattoli da 3 litri; ogni barattolo costa 15 euro.
Come gli conviene comprare la vernice? Quanto spenderà il signor Gigino?

La risposta che ci sembra più accettabile sul piano concreto e logico dal punto di vista reale sembra essere la seguente o una analoga:

Risoluzione 2 (creativa)
Al signor Gigino conviene comprare un barattolo da 4 litri nel negozio A e 2 barattoli da 3 litri nel negozio B; in tal modo spenderà:
$18\times1+15\times2=18+30=48€$.

Ma la risposta che ritenevamo sarebbe stata quella più proposta è del tipo:

Risoluzione 1 (contrattuale)

Spesa in A - Per avere 10 litri deve comprare 3 barattoli: $18 \times 3 = 54$ €

Spesa in B - Per avere 10 litri deve comprare 4 barattoli: $15 \times 4 = 60$ € .

Siccome 60 > 54, conviene comprare la vernice nel negozio A.
Il signor Gigino spenderà 54 €.

La motivazione di questa nostra attesa è legata al contratto didattico; per abitudine ripetuta, per supposta attesa da parte dell'insegnante, il risolutore sarà portato a non prendere in esame la possibilità che l'acquisto possa avvenire in mesticherie diverse. La domanda del problema 2 recita:

- *Come* gli conviene compare la vernice?

ma il risolutore tenderà a interpretarla come segue, per abitudine contrattuale:

- *Dove* gli conviene compare la vernice? Quanto spenderà il signor Gigino?

Non si tratta di una forma usuale del manifestarsi del contratto didattico, ma di una sua forma più subdola, nascosta nel testo e negli accordi stabiliti in aula relativi alla tipologia di problemi proposti e attesi. Non ripetiamo le frasi finali già scritte in 5.1.2.

5.1.3. Problema 3

Pierino vuole andare a fare i compiti dalla sua amica Camilla: in due si fa prima e s'impara di più; e poi ci si diverte! Ci sono due strade che passano da casa sua e da casa di Camilla, via Garibaldi e via Roma, tutte e due un po' tortuose, ma assolutamente piatte. Ecco la mappa. Controllala bene: su ogni tratto di strada sono scritte le lunghezze in metri:

- *la via Garibaldi misura 200 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 800 m dalla rotonda fino a casa di Camilla;*
- *la via Roma misura 750 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 100 m dalla rotonda fino a casa di Camilla.*

[Segue il disegno].

Quale percorso conviene fare a Pierino?

La risposta che ci sembra più accettabile sul piano concreto e logico, una volta esaminata la mappa messa a disposizione, sembra essere la seguente o una analoga:

Risoluzione 2 (creativa)

A Pierino conviene percorrere prima il primo tratto di via Garibaldi fino alla rotonda e poi il secondo tratto di via Roma, dalla rotonda fino a casa di Camilla. Lunghezza totale del percorso: $200 + 100 = 300\,\text{m}$.

Ma la risposta che pensiamo potrebbe essere proposta con grande maggioranza è del tipo:

Risoluzione 1 (contrattuale)

Lunghezza totale via Garibaldi: $200 + 800 = 1000\,\text{m}$

Lunghezza totale via Roma: $750 + 100 = 850\,\text{m}$

Siccome 850 < 1000, a Pierino conviene scegliere di percorrere via Roma.

Si potrebbe riportare qui per la terza volta la frase precedentemente ripetuta due volte in modo quasi identico: La motivazione di questa nostra attesa è legata al contratto didattico; …

Ma questa volta c'è una variabile didattica che potrebbe giocare un ruolo fondamentale, il disegno. Potrebbe questo modificare la situazione e avere un ruolo più coinvolgente (positivo) del contratto didattico (negativo)? Cioè: potrebbe avere più potere decisionale l'analisi della mappa che non il contratto didattico?

Altra variabile didattica: il colore del disegno; se i colori vivaci della prova potrebbero ingannare il solutore, la cartina monocromatica potrebbe aiutare? Anzi, potrebbe essere la causa di un ripensamento?

5.2. Il "compito di realtà"

Nella descrizione dei cdr e del loro ruolo educativo, come abbiamo visto, si auspica sempre che tali testi si richiamino alla realtà "vera", quella quotidianamente vissuta dagli allievi o vicina a essa o facilmente a essa rinviabile per esperienza diretta o indiretta.

I nostri tre testi seguono questa indicazione molto più di tanti cdr che si propongono agli allievi nelle riviste, nei libri di testo, nelle raccolte suggerite come modelli agli insegnanti.

Se le risposte di tipo contrattuale precedenti (risoluzioni 1) dovessero davvero prevalere, allora bisognerebbe ripensare all'idea stessa di cdr; bisognerebbe introdurre come attività concrete testi come i nostri, l'ideatore dei quali abbia almeno idea di che cosa sia il contratto didattico e facendo riferimento allo storico-classico dibattito (evidentemente ancora necessario e vivo) fra "problema scolastico" e "problema reale" (Boero, 1986). Di fatto, ripetiamo, molti dei testi attualmente proposti come cdr nulla hanno a che fare con il reale-reale.

Va detto per chiarezza che, secondo la normativa della scuola italiana e secondo l'interpretazione diffusa circa la pratica dei cosiddetti cdr, l'attività degli studenti in tale contesto non deve avvenire in maniera isolata, singola; il lavoro scolastico relativo ai cdr, dunque, deve avvenire in gruppo (o almeno in coppia) e può essere condotto sotto la guida dei docenti, ma anche di altri studenti più adulti o coetanei, tutor, genitori, esperti esterni (così si evince, per esempio, da: https://it.wikipedia.org/wiki/Compito_autentico).

Dunque, i cosiddetti cdr non devono essere svolti in modo autonomo; essi devono proporre invece attività da svolgersi secondo modalità che costituiscano occasione di discutere, organizzare e pianificare risoluzioni, discutere, situazioni concrete reali, simulare la realtà e trattarla con strumenti matematici.

Ma nella nostra ricerca la funzione dei 4 problemi (che potrebbero costituire di per sé esempi di problemi della tipologia cdr) non era quella tipica della strategia cdr; essi sono stati considerati da noi testi prototipici che illustrano situazioni concrete reali, specifiche dei cdr, ma che venivano proposti in situazioni individuali di ricerca per osservare dell’altro, e cioè come lo studente affronta i problemi stessi, rivelando un effetto del contratto didattico.

Dunque, nella nostra ricerca non si studiano modalità di proposta dei cdr, ma solo un nuovo effetto del contratto didattico; anche se i risultati della ricerca ci spingeranno ad alcune considerazioni didattiche sul senso dei cdr.

6. Domande di ricerca

Elenchiamo le domande alle quali la nostra ricerca vuole dare risposta.

D1. I docenti sono più propensi a dare spontaneamente le risposte di tipo 1 (contrattuale), al posto di quelle di tipo 2 (creativo)? I docenti ritengono che la riposta 1 sia più corretta, consona, logica della 2? Perché? Se, discutendo eventualmente con il collaboratore alla ricerca, concordano sul fatto che sia più consona alla domanda la risposta 2 piuttosto della 1, faranno ricorso all’idea di contratto didattico per giustificare il fatto che la 1 sia stata la loro prima scelta?

D2. Nei problemi 1 e 2, qual è la tipologia di risposta più frequentemente proposta dagli allievi? Nei commenti degli allievi, alcuni di essi metteranno in evidenza le differenze fra le risposte 1 e le 2? Se sì, con quali motivazioni? Appare tra queste ultime qualcuna che si possa ascrivere alla ineluttabilità del comportamento scolastico che segue il contratto didattico? Si è deciso di non fare interviste, ma di accettare comunque il colloquio con gli allievi che lo propongano spontaneamente.

D3. Se ci sono, quali sono le specificità, nei sensi precedenti, del problema 3 rispetto ai precedenti? La risposta 1 è più presente rispetto a quanto avvenuto nei problemi 1 e 2? Se sì, perché?

D4. Nel testo del problema 3 è fornita una mappa della situazione descritta nel testo; ci sono due versioni dal punto di vista cromatico: una mappa di colori diversi (come quella vista all’inizio di questo testo) e una monocromatica (come quella che segue). Chiameremo problema 4 il problema 3 nel quale il testo si mantiene identico ma la mappa proposta è in bianco e nero (Figura 2). Abbiamo ipotizzato che il colore unico utilizzato per contrassegnare le due strade possa avere più influenza nel far scegliere all’allievo la risposta 2 (creativa) piuttosto che la 1 (contrattuale); cioè abbiamo ipotizzato che le risposte di tipo 2 siano più presenti nel disegno monocromatico. Corrisponde questa ipotesi a verità empirica statisticamente significativa?

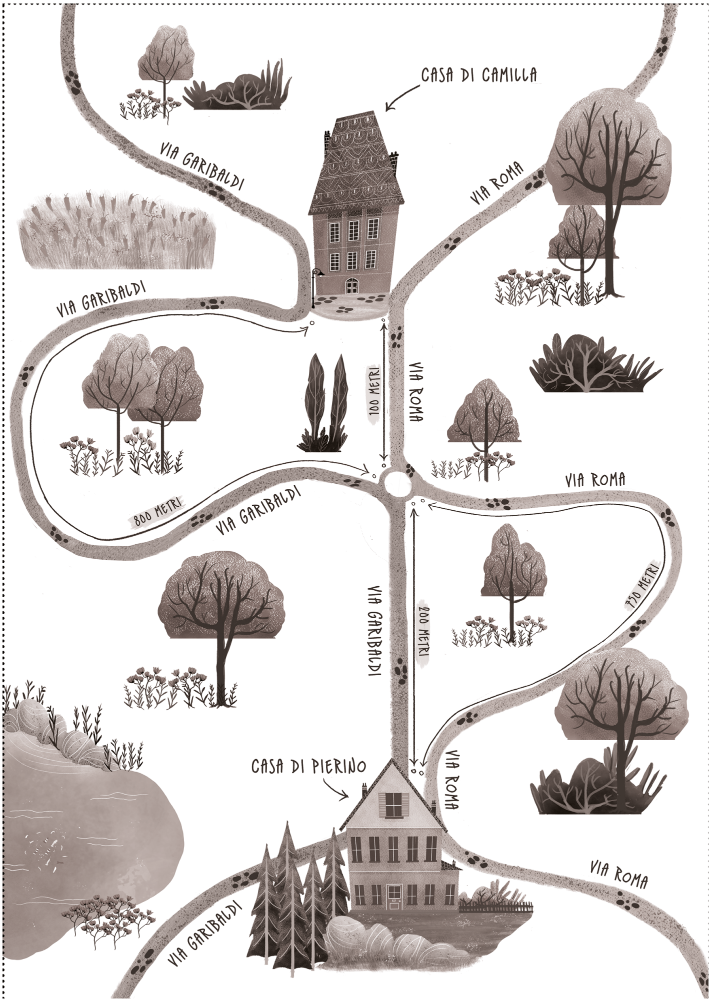


Figura 2. Mappa del problema 3 proposta in bianco e nero.

D5. Ad alcuni allievi vengono proposti i problemi in diversi ordini; ad alcuni allievi viene proposto come primo il problema 4 (cioè quello nella versione monocromatica), e poi uno solo dei o entrambi i problemi 1 e 2. Nel caso in cui al problema 4 lo studente dia la risposta 2 (creativa), questo modifica le risposte ai problemi 1 e 2, rispetto a quel che propongono gli altri allievi? Cioè: lo studente ripensa alle risposte date ai problemi 1 e 2, passando da risposte di tipo 1 (contrattuale) a risposte di tipo 2 (creativo)? Quali ipotesi si possono fare al riguardo? Si può pensare a una "rottura del contratto didattico" (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2018)?

D6. In seguito a esperienze compiute nelle loro classi, ci sono docenti che accettano i problemi proposti come cdr più vicini al concetto di realtà? O ci sono posizioni negative in merito? Riconosce il docente che l'interpretazione della domanda dei problemi 1 e 2 ha a che fare con l'idea di realtà?

D7. In generale, qual è l’atteggiamento del docente nei confronti di problemi di questo tipo? Vengono rilevate convinzioni specifiche a questo proposito? Cita spontaneamente contratto didattico e cdr? Appaiono posizioni come quelle descritte in 4.: “… Noi li abituiamo a un certo tipo di problemi …”?

D8. Dalle risposte alle domande di ricerca D1-D7, si può concludere l’esistenza di un effetto del contratto didattico che possiamo chiamare “immaginare obblighi impliciti”?

7. Metodologia della ricerca

Descriveremo di seguito le fasi nelle quali si è sviluppata la presente ricerca; premettiamo un cenno relativo alla metodologia generale seguita; dopo di che diremo qualcosa di più specifico in particolare su ciascuna fase.

La nostra metodologia di ricerca rientra nel vasto dominio di quella che viene chiamata, oramai da decenni, una “ricerca qualitativa”; ci esimiamo dal descriverne le caratteristiche, dato che in Iori (2015, pp. 92–162) ciò è fatto in modo estremamente preciso e assai dettagliatamente documentato e non riteniamo di dover ripercorrere i passi già seguiti da questa ricercatrice.[3] In questa tesi, alle pagine 92–162, vengono esposte in maniera estremamente efficace, completa e precisa le basi della ricerca qualitativa; a quelle pagine noi ci ispiriamo e a esse rimandiamo per una dettagliata analisi della nostra metodologia in generale. Tuttavia, come abbiamo già anticipato, diciamo qualcosa in più in modo specifico per ciò che riguarda le singole fasi nelle quali si è strutturata la nostra ricerca. La ricerca si è sviluppata seguendo le fasi successivamente descritte.

Fase 1: Risoluzione dei problemi da parte dei ricercatori.

I ricercatori stessi sono stati invitati a risolvere per iscritto i problemi 1, 2 e successivamente 1, 2 e 3 (con immagine a colori); essi non avevano in origine alcuna informazione sulla ricerca. Queste risposte entrano a far parte dei materiali della ricerca come “prodotto 1” e saranno commentate successivamente dagli autori come “risultati della ricerca” (par. 8).

Dopo aver consegnato le proprie risoluzioni ai problemi oggetto della ricerca, ai ricercatori è stato inviato un breve testo nel quale si spiegavano loro le motivazioni della ricerca in dettaglio, in modo tale che fossero informati sugli obiettivi della ricerca stessa. Questa fase risponde ad alcuni requisiti

---

[3] Facciamo riferimento alla sua tesi dottorale: *La consapevolezza dell’insegnante della dimensione semio-cognitiva dell’apprendimento della matematica*, sostenuta nel 2015 presso il dottorato di ricerca in Storia e Didattica delle Matematiche, Storia e Didattica della Fisica, Storia e Didattica della Chimica, Dipartimento di Matematica e Informatica dell’Università di Palermo, avendo come direttore di tesi il prof. Aldo Brigaglia e come co-direttore uno degli autori del presente articolo. Citiamo due pubblicazioni della stessa autrice (Iori, 2017, 2018), realizzate a seguito della tesi.

enunciati da Jaworski (1998):

> Il processo di costruzione è stato visto come un adattamento delle loro conoscenze esistenti (derivanti da precedenti esperienze) per accogliere nuove esperienze. Questa posizione costruttivista implicava che un insegnante non potesse *dare* conoscenze matematiche agli studenti: l'insegnamento doveva essere visto come qualcosa di più di un semplice trasferimento di conoscenze.[4] (Jaworski, 1998, p. 113)

Jaworski fa riferimento agli studenti, ma noi interpretiamo questa frase in riferimento a tutti coloro che sono impegnati nella ricerca, dunque, in primis, ai ricercatori. Dare non solo agli insegnanti coinvolti ma agli stessi ricercatori l'occasione per impegnare sé stessi nella ricerca in qualità di soggetti indagati, per cogliere gli aspetti di novità rispetto all'ordinario lavoro di aula, ci sembra offrire l'opportunità di mettersi in gioco per "accogliere nuove esperienze", vivere il tema della ricerca sulla propria esperienza di docenti, sul proprio vissuto, evidenziare che non si tratta solo di trasmettere conoscenze (in fondo è a questo che si aspira sempre), ma viverle come faranno in una fase successiva prima alcuni colleghi e poi gli allievi.

Va notato come, più in generale, questa ricerca si debba interpretare come di carattere qualitativo dal punto di vista epistemologico:

> La ricerca qualitativa (...) esplora le caratteristiche e le circostanze uniche che caratterizzano un caso particolare. Tuttavia, lo scopo non è evidenziare l'unicità e la stranezza del caso. Si tratta di esplorare la ricchezza di un particolare che possa servire come esempio di qualcosa di più generale. (Ernest, 1998, p. 34)[5]

Fase 2: Risoluzione dei problemi da parte di docenti di scuola primaria.

A 38 docenti di scuola primaria sono stati sottoposti i problemi 1, 2 e 3 (con immagine a colori) con l'invito a risolverli uno per uno e a scrivere nello stesso foglio eventuali commenti. I ricercatori erano presenti durante la fase di risoluzione ma erano tenuti a non fare alcun commento né dare risposta alcuna alle eventuali domande concrete-operative da parte dei docenti sottoposti alla prova, durante la fase di risoluzione. Solo alla fine della prova, potevano raccogliere eventuali commenti e rispondere a eventuali domande.

Come già evidenziato in D'Amore e Fandiño Pinilla (2005), si è rivelato importante nel corso di varie ricerche, quando si indagano atteggiamenti, consuetudini e attività cognitive degli allievi, verificare quali siano le convinzioni, gli atteggiamenti e le consapevolezze dei docenti su questi stessi temi, dato che, spesso, quel che viene riscontrato nelle risposte degli allievi ha radici nelle convinzioni dei docenti (Fandiño Pinilla, 2011). In quella ricerca del 2005 si sfruttò una metodologia di ricerca che definimmo "a cascata": prima si compie la verifica sui ricercatori impegnati, poi sui docenti coinvolti

---

[4] Traduzione nostra.
[5] Traduzione nostra.

e solo alla fine sugli allievi. Questo legame (conoscenze degli allievi – convinzioni dei docenti) è stato da noi mostrato in forma assai esplicita anche in una ricerca specifica (Arrigo et al., 2009).

Fase 3: Risoluzione dei problemi da parte di allievi di V primaria.

Gli allievi sottoposti alla prova o non erano allievi dei docenti sottoposti alla prova della Fase 2, oppure la prova avveniva senza che il docente avesse avuto nel frattempo alcun genere di contatto con essi, per esempio la prova avveniva immediatamente dopo la Fase 2 e il docente di classe non era in aula.

All'80% degli allievi di ogni classe venivano dati da risolvere i problemi 1, 2 e 3 (immagine a colori) in questo ordine. Al 20% di questi allievi veniva sottoposto alla fine anche il problema 4 (cioè il problema del percorso nella versione in bianco e nero) per verificare se ci fossero ripensamenti relativi alle risoluzioni proposte in precedenza.

Al 20% degli allievi delle stesse classi venivano dati da risolvere i problemi 4 (immagine monocromatica), 1 e 2 in questo ordine. Al 20% di questi allievi veniva dato anche il problema 3, talvolta prima del 4, talvolta fra 1 e 2, talvolta alla fine.

Tutti gli allievi erano invitati a risolvere i problemi sempre e solo per iscritto e a scrivere eventuali osservazioni sotto le risoluzioni, nello stesso foglio.

Non è escluso che i ricercatori potessero intrattenere colloqui informali con qualcuno degli allievi, ma mai sollecitati dall'adulto, bensì solo se gli allievi li avessero proposti. I nostri collaboratori presenti alle prove trascrivevano esplicitamente brani salienti di alcuni di questi colloqui. I risultati di questi colloqui venivano da noi assunti solo come ulteriori informazioni non strutturate per aiutare nell'interpretazione delle tipologie di risposte date per iscritto.

Si tratta della fase più interessante e significativa; la raccolta oggettiva senza influenza esterna dei dati da analizzare è raccomandata abbondantemente da tutta la letteratura sulle metodologie di ricerca non solo in DdM; l'allievo, soggetto della ricerca, era solo di fronte ai problemi ai quali era invitato dal ricercatore a dare una risposta; la dava senza relazioni esterne (né con il ricercatore, né con il suo docente, né con altri docenti, né con i propri compagni), la situazione migliore dal punto di vista oggettivo per il tipo di ricerca che volevamo condurre. Non era prevista alcuna valutazione di tipo "scolastico", solo la nostra di ricerca, e l'allievo ne era reso consapevole; non erano prescritti tempi da rispettare nel senso che il ricercatore dichiarava esplicitamente alla classe che non c'era un tempo limite di consegna né altre norme. Dunque, le norme che ogni allievo metteva in campo nel corso del suo impegno personale dipendevano dalle abitudini consuete in aula ed erano determinate da accordi più o meno espliciti con il proprio docente, la storia di classe. Il suo compito era di risolvere i problemi proposti, eventuali commenti erano determinati da una incongruità fra due atteggiamenti: quel che lo studente crede che ci si aspetti da lui (Schubauer-Leoni, 1988, 1989), quel che risponderebbe se fosse libero di optare per una scelta non codificata dalle abitudini scolastiche (Balacheff, 1988).

Questo modo di interpretare il compito è così tradizionale, come testimonia la vetustà delle date delle due citazioni fatte poco sopra (vetustà appositamente scelta), che non riteniamo necessitino altre analisi della metodologia di ricerca in questa fase 3.

Nota. Facciamo ancora una volta notare che abbiamo deciso di non usare numeri con la virgola come dati del problema perché sappiamo che la loro presenza può creare difficoltà nel processo di risoluzione. A noi non interessava l'abilità nel risolvere problemi, ma il tipo di interpretazione che gli allievi avrebbero dato al testo e la conseguente risoluzione adottata.

Tutti i protocolli così raccolti in ciascuna delle 3 fasi venivano inviati ai due autori del presente articolo per l'analisi dei risultati (par. 8) e per dare dunque risposte alle precedenti domande di ricerca (par. 9), insieme alla trascrizione dei commenti e delle domande degli insegnanti e alla trascrizione dei colloqui avuti con gli studenti.

8. Risultati della ricerca

8.1. Risposte relative alla Fase 1: Risoluzione dei problemi da parte dei ricercatori

Dei 6 ricercatori che hanno collaborato alla ricerca,

- due risolvono i problemi 1 e 2 secondo la tipologia di risposta 1 (quella che abbiamo definito contrattuale);
    - uno di essi, risolve secondo la stessa tipologia anche il problema 3 e non risolve il 4 dichiarando di ritenerlo "uguale al 3";
    - l'altro risolve anche il 3 secondo la tipologia di risposta 2 (quella che abbiamo definito creativa); una volta analizzato il 3, ha un ripensamento su 1 e 2 che dichiara esplicitamente, senza però cambiare le risoluzioni di 1 e 2 ma evidentemente mettendole in dubbio;
- tre risolvono i problemi secondo la tipologia creativa;
- uno risolve i problemi 1, 3 e 4 secondo la tipologia creativa; tenta di farlo anche nel caso del problema 2, ma non si accorge che possono essere acquistati 2 barattoli da 3 litri e uno da 4 per un totale di 10 litri, e sceglie dunque di acquistare 2 barattoli da 4 litri e uno da 3 per un totale di 11 litri (dichiarando che così il protagonista della storia avrà un litro in più a sua disposizione).

Si noti solo come l'effetto "immaginare obblighi impliciti" si presenta perfino fra i ricercatori i quali non ne sono immuni.

8.2. Risposte relative alla Fase 2: Risoluzione dei problemi da parte di docenti di scuola primaria

Gli insegnanti di scuola primaria oggetto della ricerca sono stati in totale 38, di diverse regioni italiane. Di questi 38:

- 19 risolvono tutti i 3 o 4 problemi secondo la modalità contrattuale;
- 8 risolvono il problema 1 secondo la modalità creativa e i problemi 2, 3 e 4 secondo la modalità contrattuale;
- 4 risolvono i problemi 1 e 2 secondo la modalità creativa e i problemi 3 e 4 secondo la modalità contrattuale;
- 7 risolvono tutti i problemi assegnati loro secondo la modalità creativa.

Come faremo anche in seguito, NON teniamo conto degli errori di calcolo o altro; per esempio, nel caso del problema 2 vi sono vari errori di calcolo, ma noi consideriamo solo la modalità di risoluzione (contrattuale vs creativa).

Note. Evidenziamo qui di seguito alcune dichiarazioni scritte di insegnanti o affermazioni che sono state fatte oralmente ai ricercatori e che questi hanno diligentemente trascritto.

- Alcuni insegnanti segnalano che il problema 4 è identico al 3: esprimono l’idea che si sia trattato di un errore nell’impostazione della ricerca.
- Diversi insegnanti chiedono quali devono essere le modalità di risoluzione; per esempio: “Bisogna scrivere i dati?”; “Ma posso scrivere quel che voglio?”; “Dove posso fare i calcoli?”; “I problemi 3 e 4 sono uguali, è una presa in giro?”.
- Un insegnante chiede che cosa deve fare, se deve risolvere i problemi proposti.
- Un insegnante chiede un foglio in bianco “per poter scrivere la brutta copia”.
- Relativamente spesso la risoluzione del problema 2 è accompagnata da riflessioni sulla vernice acquistata in più, “utile per ritocchi” (e cose simili); si tratta di una sorta di giustificazione dell’acquisto di più dei 10 litri necessari.
- Due insegnanti prima eseguono tutti i calcoli dei problemi 1 e 2 secondo la modalità contrattuale; poi scrivono che non è necessario fare i calcoli e che si può comprare la frutta in banchi diversi (modalità creativa, ma in entrambi i casi senza calcoli).
- Diversi insegnanti che risolvono i problemi 3 e/o 4 con modalità contrattuale, alla fine segnalano però che si potrebbe anche “cambiare strada alla rotonda” o “andare dritto”.
- Due insegnanti fanno parecchi calcoli, ma non danno la risposta, offrendo al collaboratore alla ricerca solo i calcoli; essendo tali calcoli del tipo contrattuale, li abbiamo inseriti nel primo gruppo.

- Un protocollo interessante è quello di un insegnante che prima esegue i calcoli del problema 1 con modalità contrattuale, poi scrive che "non si può obbligare uno a effettuare le compere nello stesso negozio", come se nel testo fosse espresso questo obbligo.
- Lo stesso capita a un altro insegnante che protesta contro il fatto che si costringa il ragazzo protagonista dei problemi 3 e 4 a percorrere una sola strada, che "nessuno vieta di cambiare strada".
- Ancora più interessante è la richiesta seguente: "Ma lo devo risolvere come un problema?" (si riferisce al problema 1); il collaboratore alla ricerca chiede: "In che senso?"; "Se lo devo risolvere come problema la risoluzione è questa (e mostra la modalità contrattuale), ma se lo devo fare davvero, se vado al mercato davvero, allora no".
- Inoltre: "Non darei mai questi problemi ai miei alunni, non sono problemi veri". Con frasi diverse, ma di significato analogo, ne abbiamo raccolte diverse, a volte esplicite (almeno 4), altre volte non palesi.

Notiamo che solo in un caso un insegnante nota che c'è una certa differenza fra i problemi 3 (colorato) e 4 (bianco/nero) e che forse questa differenza potrebbe aiutare i bambini a dare "la risposta giusta" (che però non viene indicata).

8.3. Risposte relative alla Fase 3: Risoluzione dei problemi da parte di allievi di V primaria

Gli allievi di scuola primaria soggetto della ricerca sono stati in totale 306, di diverse regioni italiane.

Ricordiamo ancora che NON teniamo conto degli errori di calcolo o altro del genere; consideriamo solo la modalità di risoluzione (contrattuale vs creativa) così come si evince dai protocolli.

Il problema 2 si rivela di difficile comprensione da parte degli allievi; molti non lo risolvono ma, spesso, chi ci prova fa calcoli a caso, di difficile interpretazione. Di questi 306 studenti:

- 24 non risolvono alcun problema
- 12 risolvono i problemi 1 e 3 e/o 4 con modalità creativa
- 89 risolvono i problemi 1 e 3 e/o 4 con modalità contrattuale
- 18 risolvono solo il problema 1 con modalità creativa
- 84 risolvono solo il problema 1 con modalità contrattuale
- 12 risolvono solo i problemi 3 e/o 4 con modalità creativa
- 19 risolvono solo i problemi 3 e/o 4 con modalità contrattuale
- 20 risolvono tutti i problemi proposti ma con modalità contrattuale
- 5 risolvono tutti i problemi proposti con modalità creativa
- 14 risolvono il problema 1 con modalità creativa, il 2 con modalità

contrattuale e il 3 e/o il 4 con modalità contrattuale

- 9 risolvono il problema 1 con modalità contrattuale, il 2 con modalità contrattuale e il 3 e/o il 4 con modalità creativa.

Note 1. Evidenziamo qui di seguito alcune dichiarazioni fatte oralmente dagli studenti ai collaboratori alla ricerca e che questi hanno diligentemente trascritto.

> I bambini pongono moltissime domande sulle modalità da mettere in atto: Dobbiamo fare come a scuola? Dobbiamo scrivere anche i dati? Dobbiamo fare il disegno? Ma dobbiamo fare il problema matematico o davvero? Ma io posso andare davvero al mercato? (Questa domanda è stata fatta da un bambino che ha poi risolto 1 e 2 con modalità creativa); …

Note 2. Evidenziamo qui di seguito alcune particolarità che i due autori hanno rilevato nei protocolli degli studenti.

- Riscontriamo moltissimi errori nella risoluzione, molti non sensi; esempio: si effettua l'addizione di tutti i dati numerici che appaiono nel testo sia del problema 1 sia del 2 e il risultato viene proposto come risposta ai problemi; talvolta appaiono anche moltiplicazioni a caso (in generale senza risposta finale al problema).
- Appaiono diverse risoluzioni che vengono proposte sotto forma di diagrammi di flusso, nessuna delle quali corretta.
- Appare un eccesso di formalismi: riscrittura dei dati, spesso complessa; scrittura dei dati numerici e dei significati delle parole presenti nel testo, un'inutile e ingombrante messa in scena che è evidentemente stata concordata con l'insegnante e che certo non solo non aiuta nella risoluzione del problema, ma la impedisce; di solito il lavoro dei bambini termina con questo apparato, come se essi ritenessero che in questo consiste la risoluzione dei problemi. Attività di questo genere sono già state ampiamente denunciate come estremamente negative e controproducenti in D'Amore (2014).
- Appaiono moltissime scritture di calcoli senza alcun senso.
- Si nota un uso disinvolto del segno di uguaglianza in moltissimi protocolli. Faremo vedere alcuni esempi di seguito. La cosa è talmente diffusa che riteniamo sia accettata dagli insegnanti.

Ricordiamo che nel par. 10 proporremo alcuni esempi di protocolli.

9. Risposte alle domande di ricerca

Sulla base dei risultati ottenuti, diamo risposta (Rn) alle domande di ricerca (Dn) ($1 \leq n \leq 8$) formulate nel par. 6.

D1. I docenti sono più propensi a dare spontaneamente le risposte di tipo 1 (contrattuale), al posto di quelle di tipo 2 (creativo)? I docenti ritengono che la riposta 1 sia più corretta, consona, logica della 2? Perché? Se, discutendo eventualmente con il collaboratore alla ricerca, concordano sul fatto che sia più consona alla domanda la risposta 2 piuttosto della 1, faranno ricorso all'idea di contratto didattico per giustificare il fatto che la 1 sia stata la loro prima scelta?

R1. I docenti si sono rivelati più propensi a dare spontaneamente le risposte di tipo 1 (contrattuale), al posto di quelle di tipo 2 (creativa). I docenti ritengono per lo più che la 1 sia la risposta più coerente con la prassi scolastica usuale. Nessun docente fa ricorso all'idea di contratto didattico per giustificare il fatto che la 1 sia stata la loro prima scelta.

D2. Nei problemi 1 e 2, qual è la tipologia di risposta più frequentemente proposta dagli allievi? Nei commenti degli allievi, alcuni di essi metteranno in evidenza le differenze fra le risposte 1 e le 2? Se sì, con quali motivazioni? Appare tra queste ultime qualcuna che si possa ascrivere alla ineluttabilità del comportamento scolastico che segue il contratto didattico? Si è deciso di non fare interviste, ma di accettare comunque il colloquio con gli allievi che lo propongano spontaneamente.

R2. Nei problemi 1 e 2, la tipologia di risposta più frequentemente proposta dagli allievi è quella contrattuale. Solo in pochissimi commenti degli allievi sono state messe in evidenza le differenze fra le risposte 1 (contrattuali) e le 2 (creative), come abbiamo visto nel par. 9. In questi pochissimi casi, le motivazioni sono di aderenza a modelli di problemi usuali in aula; dunque hanno sempre a che fare con il comportamento scolastico condizionato dal contratto didattico.

D3. Se ci sono, quali sono le specificità, nei sensi precedenti, del problema 3 rispetto ai precedenti? La risposta 1 è più presente rispetto a quanto avvenuto nei problemi 1 e 2? Se sì, perché?

R3. Il problema 3 offre una situazione grafica immediatamente analizzabile; dunque ci si aspettava più risposte di tipo 2 (creative); tuttavia, moltissimi studenti preferiscono eseguire (o, meglio, ritengono di dover eseguire) le addizioni che portano alle misure delle lunghezze delle singole strade, non a risolvere il problema (con un atto di assunzione di responsabilità nell'interpretazione della domanda). A partire dalle risposte degli allievi è immediato constatare che lo studente considera che questo atteggiamento sia consono all'abitudine legata al contratto didattico (forse addirittura consistente in accordi espliciti) concordato con l'insegnante circa la modalità di risoluzione dei problemi: eseguire tutte le operazioni possibili con i dati a disposizione. Questo fatto è rinforzato da quanto dichiarato nel par. 8, quando si osserva la notevole quantità di bambini-risolutori che scrivono operazioni a caso, pur di usare tutti i dati numerici contenuti nel testo.

D4. Nel testo del problema 3 è fornita una mappa della situazione descritta nel testo; ci sono due versioni dal punto di vista cromatico: una mappa di colori diversi (come quella vista all'inizio di questo testo) e una monocromatica (come quella che segue). Chiameremo problema 4 il problema 3 nel quale il testo si mantiene identico ma la mappa proposta è in bianco e nero (Figura 2). Abbiamo ipotizzato che il colore unico utilizzato per contrassegnare le due strade possa avere più influenza nel far scegliere all'allievo la risposta 2 (creativa) piuttosto che la 1 (contrattuale); cioè abbiamo ipotizzato che le risposte di tipo 2 siano più presenti nel disegno monocromatico. Corrisponde questa ipotesi a verità empirica statisticamente significativa?

R4. I risultati mostrano che tale ipotesi è errata. Le due mappe vengono considerate identiche o, almeno, equisignificanti.

D5. Ad alcuni allievi vengono proposti i problemi in diversi ordini; ad alcuni allievi viene proposto come primo il problema 4 (cioè quello nella versione monocromatica), e poi uno solo dei o entrambi i problemi 1 e 2. Nel caso in cui al problema 4 lo studente dia la risposta 2 (creativa), questo modifica le risposte ai problemi 1 e 2, rispetto a quel che propongono gli altri allievi? Cioè: lo studente ripensa alle risposte date ai problemi 1 e 2, passando da risposte di tipo 1 (contrattuale) a risposte di tipo 2 (creativo)? Quali ipotesi si possono fare al riguardo? Si può pensare a una "rottura del contratto didattico" (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2018)?

R5. I risultati mostrano che il caso ipotizzato in D5 non si rileva fra i risolutori studenti mentre era stato avvertito, ma in misura minima evidenziata, fra i risolutori insegnanti.

D6. In seguito a esperienze compiute nelle loro classi, ci sono docenti che accettano i problemi proposti come cdr più vicini al concetto di realtà? O ci sono posizioni negative in merito? Riconosce il docente che l'interpretazione della domanda dei problemi 1 e 2 ha a che fare con l'idea di realtà?

R6. Le dichiarazioni e i commenti spontanei di alcuni (pochi) docenti fanno riferimento a "situazioni vere", a "spese vere", anche se mai vengono nominati i cdr. Sono assai di più le posizioni negative in merito, dato che i problemi 1 e 2 contravvengono le usuali forme e situazioni proposte nei problemi scolastici diffusi. Alcuni insegnanti, come abbiamo visto, si ribellano all'idea di poter proporre in aula ai propri allievi testi come 1 e 2, considerati non conformi alla prassi abituale.

D7. In generale, qual è l'atteggiamento del docente nei confronti di problemi di questo tipo? Vengono rilevate convinzioni specifiche a questo proposito? Cita spontaneamente contratto didattico e cdr? Appaiono posizioni come quelle descritte in 4.: "… Noi li abituiamo a un certo tipo di problemi …"?

R7. Come abbiamo visto poche righe fa, l'atteggiamento verso l'eventuale uso di problemi di questo tipo è di rifiuto. Nessun insegnante cita né contratto didattico né cdr. Le posizioni descritte nel par. 4 emergono con forza fra gli insegnanti che propongono ai collaboratori alla ricerca delle riflessioni. In verità il numero di insegnanti che propongono riflessioni è basso; accettato di mettersi nei panni di risolutore di problemi pensati per bambini di V primaria, molti degli insegnanti si comportano di conseguenza, secondo una prassi che è considerata abituale e corretta.

D8. Dalle risposte alle domande di ricerca D1-D7, si può concludere l'esistenza di un effetto del contratto didattico che possiamo chiamare "immaginare obblighi impliciti"?

R8. In base a tutto quanto precede, ci pare evidente che esista un effetto del contratto didattico che abbiamo deciso di chiamare "immaginare obblighi impliciti"; esso consiste, da parte dei risolutori, nell'essere disposti a rinunciare a interpretare il senso della richiesta esplicita del problema (sia da parte degli allievi, sia da parte dei docenti) e di far rientrare il compito nelle comuni, diffuse, supposte attese, restituendo il problema in maniera modificata in modo tale cioè che esso aderisca a un modello di problema atteso o usuale. I testi dei problemi vengono dunque riscritti e interpretati per far sì che i supposti "obblighi impliciti" emergano, modificando la semantica dei testi proposti.

Nel testo del problema 1, la prima domanda:

- *Come* è più conveniente fare l'acquisto?

viene trasformata come segue:

- *Dove* è più conveniente fare l'acquisto?

essendo implicito il fatto che sia obbligatorio fare la spesa in uno solo dei due banchi.

Nel testo del problema 2, la prima domanda:

- *Come* gli conviene comprare la vernice?

viene trasformata come segue:

- *Dove* gli conviene comprare la vernice?

essendo implicito il fatto che sia obbligatorio fare la spesa in una sola delle due mesticherie.

Nel testo dei problemi 3 e 4, nella domanda:

- Quale percorso conviene fare a Pierino?

si considera come implicito il fatto che sia obbligatorio che il percorso avvenga completamente su una stessa strada senza poter immaginare di poter dividere il percorso su due strade diverse, un tratto sull'una e un tratto sull'altra.

Ci sembra evidente che l'effetto "immaginare obblighi impliciti" sia presente con forza, sia presso i docenti che (ancora di più) presso gli studenti.

10. Esempi di protocolli con brevi commenti

Presentiamo di seguito alcuni protocolli di bambini a mo’ di esempio. Abbiamo sempre cancellato il nome dell’autore.

PROBLEMA 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l’acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

BANCO A

1€ × 3kg = 3 €

2€ × 2kg = 4€

7 €

BANCO B

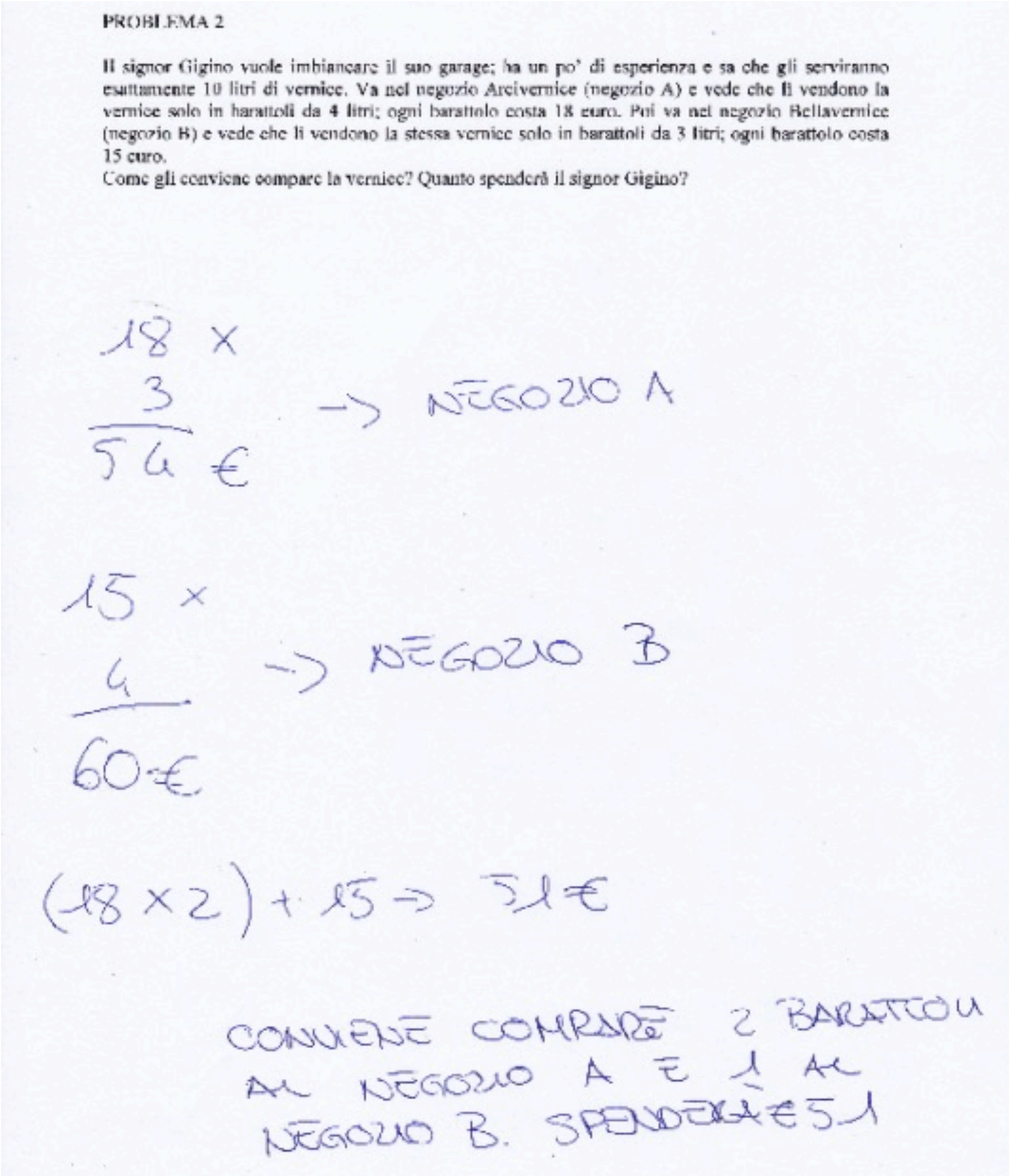
2€ × 3kg = 6€

1€ × 2kg = 2 €

8 €

È più conveniente acquistare al banco A. Nonna Rosa spenderà 7 € se deciderà di acquistare al banco A e 8€ se invece deciderà di acquistare al banco B.

Figura 3. Esempio di risoluzione del problema 1 con metodologia contrattuale. Si noti la confusione tra € ed €/kg, molto diffusa in tutta la scuola primaria.



PROBLEMA 2

Il signor Gigino vuole imbiancare il suo garage; ha un po' di esperienza e sa che gli serviranno esattamente 10 litri di vernice. Va nel negozio Arcivernice (negozio A) e vede che lì vendono la vernice solo in barattoli da 4 litri; ogni barattolo costa 18 euro. Poi va nel negozio Bellavernice (negozio B) e vede che lì vendono la stessa vernice solo in barattoli da 3 litri; ogni barattolo costa 15 euro.
Come gli conviene compare la vernice? Quanto spenderà il signor Gigino?

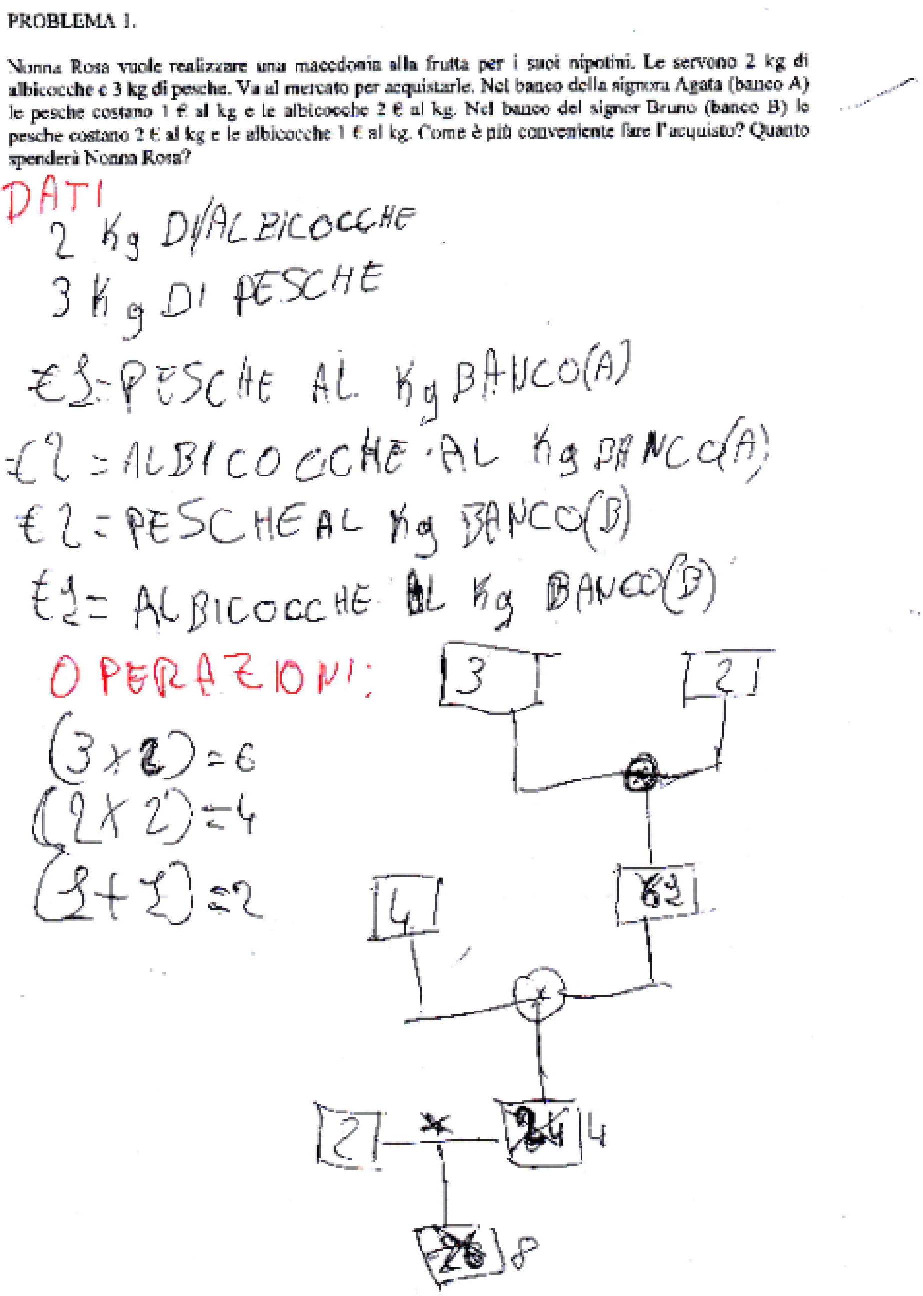
$$\begin{array}{r} 18 \times \\ 3 \\ \hline 54\ € \end{array} \rightarrow \text{NEGOZIO A}$$

$$\begin{array}{r} 15 \times \\ 4 \\ \hline 60\ € \end{array} \rightarrow \text{NEGOZIO B}$$

$$(18 \times 2) + 15 \Rightarrow 51\ €$$

CONVIENE COMPRARE 2 BARATTOLI AL NEGOZIO A E 1 AL NEGOZIO B. SPENDERÀ € 51

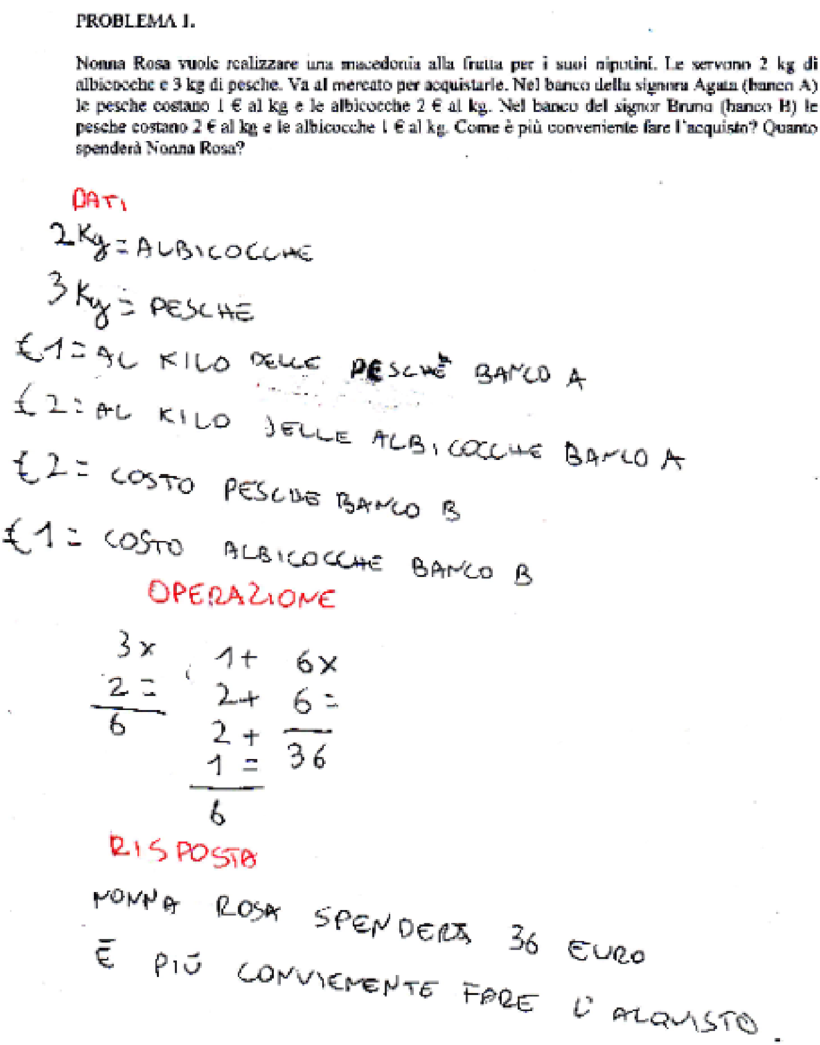
Figura 4. Esempio di risoluzione del problema 2 con metodologia creativa.



PROBLEMA 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

Figura 5. Esempio di risoluzione del problema 1 con l'uso di un diagramma di flusso e calcoli solo parziali. Si noti un uso linguistico e non formale del segno di uguaglianza.



PROBLEMA 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

DATI

2 Kg = ALBICOCCHE

3 Kg = PESCHE

€ 1 = AL KILO DELLE PESCHE BANCO A

€ 2 = AL KILO DELLE ALBICOCCHE BANCO A

€ 2 = COSTO PESCHE BANCO B

€ 1 = COSTO ALBICOCCHE BANCO B

OPERAZIONE

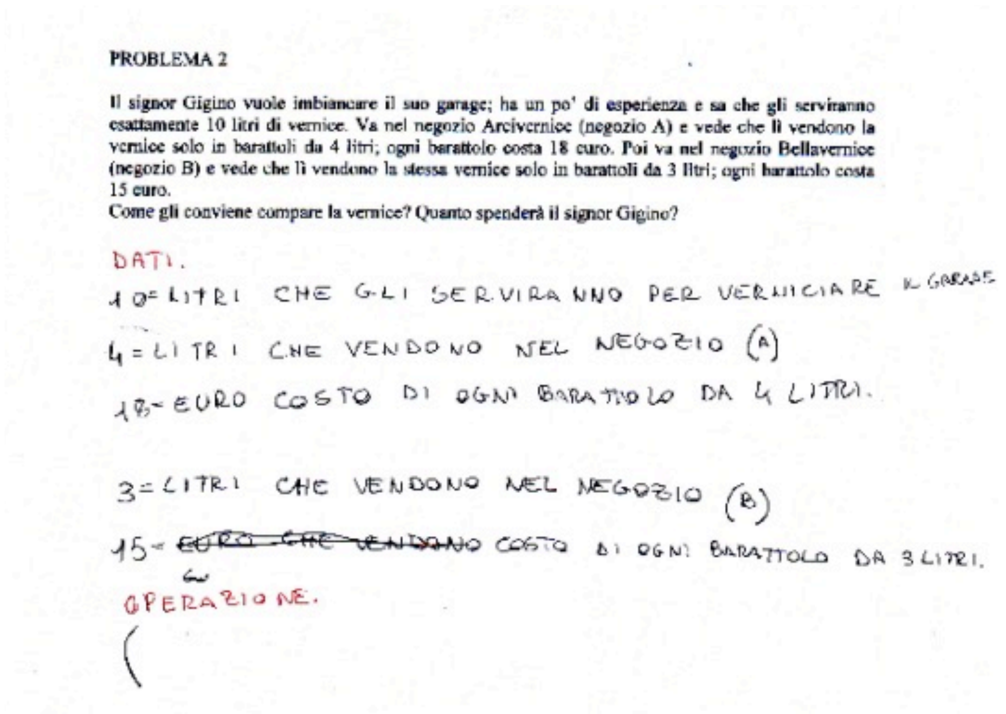
$3 \times 2 = 6$; $1 + 2 + 2 + 1 = 6$; $6 \times 6 = 36$

RISPOSTA

NONNA ROSA SPENDERÀ 36 EURO

È PIÙ CONVIENIENTE FARE L'ACQUISTO.

Figura 6. Esempio di risoluzione del problema 1 con calcoli non pertinenti. Si noti l'uso che viene fatto del segno di uguaglianza.



PROBLEMA 2

Il signor Gigino vuole imbiancare il suo garage; ha un po' di esperienza e sa che gli serviranno esattamente 10 litri di vernice. Va nel negozio Arcivernice (negozio A) e vede che lì vendono la vernice solo in barattoli da 4 litri; ogni barattolo costa 18 euro. Poi va nel negozio Bellavernice (negozio B) e vede che lì vendono la stessa vernice solo in barattoli da 3 litri; ogni barattolo costa 15 euro.
Come gli conviene compare la vernice? Quanto spenderà il signor Gigino?

DATI.
10= LITRI CHE GLI SERVIRANNO PER VERNICIARE IL GARAGE
4 = LITRI CHE VENDONO NEL NEGOZIO (A)
18= EURO COSTO DI OGNI BARATTOLO DA 4 LITRI.

3= LITRI CHE VENDONO NEL NEGOZIO (B)
15= ~~EURO CHE VENDONO~~ COSTO DI OGNI BARATTOLO DA 3 LITRI.
OPERAZIONE.
(

Figura 7. Esempio di risoluzione del problema 2; l'allievo mette in evidenza i dati, ma poi non è in grado di avviare una risoluzione. Si ricordi che non esiste un fattore tempo dato che era stato stabilito che non c'era un tempo limite di consegna. Si noti ancora l'uso del segno di uguaglianza.

PROBLEMA 3

Pierino vuole andare a fare i compiti dalla sua amica Camilla: in due si fa prima e s'impara di più; e poi ci si diverte! Ci sono due strade che passano da casa sua e da casa di Camilla, via Garibaldi e via Roma, tutte due un po' tortuose, ma assolutamente piatte. Ecco la mappa. Controllala bene: su ogni tratto di strada sono scritte le lunghezze in metri:

la via Garibaldi misura 200 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 800 m dalla rotonda fino a casa di Camilla;

la via Roma misura 750 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 100 m dalla rotonda fino a casa di Camilla.

Quale percorso conviene fare a Pierino?

DATI

200 m: DA CASA DI PIERINO ALLA ROTONDA (VIA GARIBALDI)

800 m: DALLA ROTONDA ALLA CASA DI CAMILLA (VIA GARIBALDI)

750 m: DA CASA DI PIERINO ~~ALLA~~ ALLA ROTONDA (VIA ROMA)

100 m: DALLA ROTONDA ALLA CASA DI CAMILLA (VIA ROMA)

OPERAZIONI

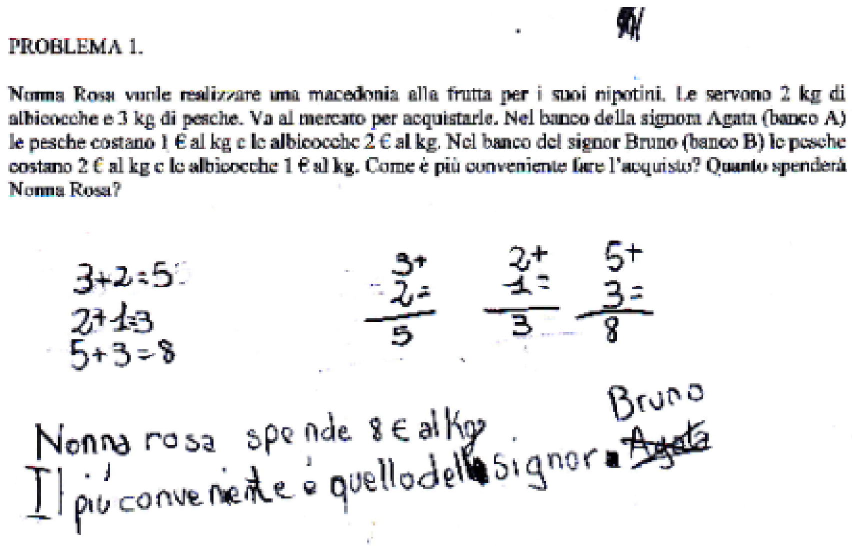
200+800 = 1000 m (VIA GARIBALDI)

750+100 = 850 m (VIA ROMA)

RISPOSTA

A PIERINO CONVIENE PRENDERE VIA ROMA.

Figura 8. Esempio di risoluzione del problema 3 con metodologia contrattuale. Si noti ancora l'uso del segno di uguaglianza.



PROBLEMA 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l’acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

3+2=5
2+1=3
5+3=8

$\begin{array}{r} 3+ \\ 2= \\ \hline 5 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2+ \\ 1= \\ \hline 3 \end{array}$ $\begin{array}{r} 5+ \\ 3= \\ \hline 8 \end{array}$

Nonna rosa spende 8 € al Kg.
Il più conveniente è quello della signor Bruno ~~Agata~~

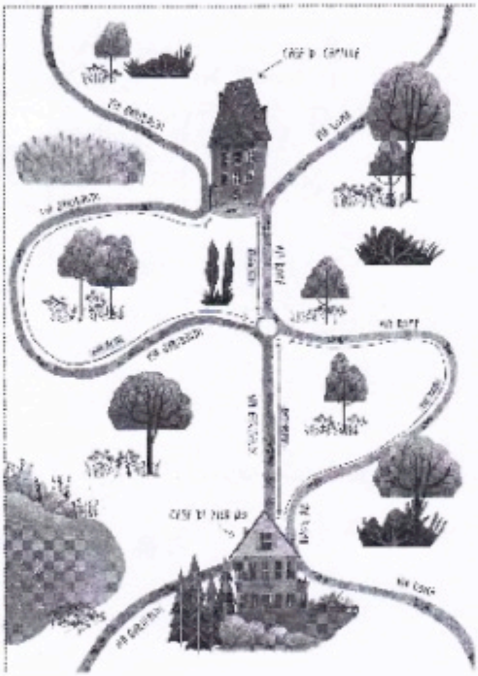
Figura 9. Tentativo di risoluzione del problema 1 di tipo contrattuale con operazioni non chiare.

PROBLEMA 3

Pierino vuole andare a fare i compiti dalla sua amica Camilla: in due si fa prima e s'impara di più; e poi ci si diverte! Ci sono due strade che passano da casa sua e da casa di Camilla, via Garibaldi e via Roma, tutte due un po' tortuose, ma assolutamente piatte. Ecco la mappa. Controllala bene: su ogni tratto di strada sono scritte le lunghezze in metri:

la via Garibaldi misura 200 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 800 m dalla rotonda fino a casa di Camilla;

la via Roma misura 750 m da casa di Pierino fino alla rotonda; e poi 100 m dalla rotonda fino a casa di Camilla.



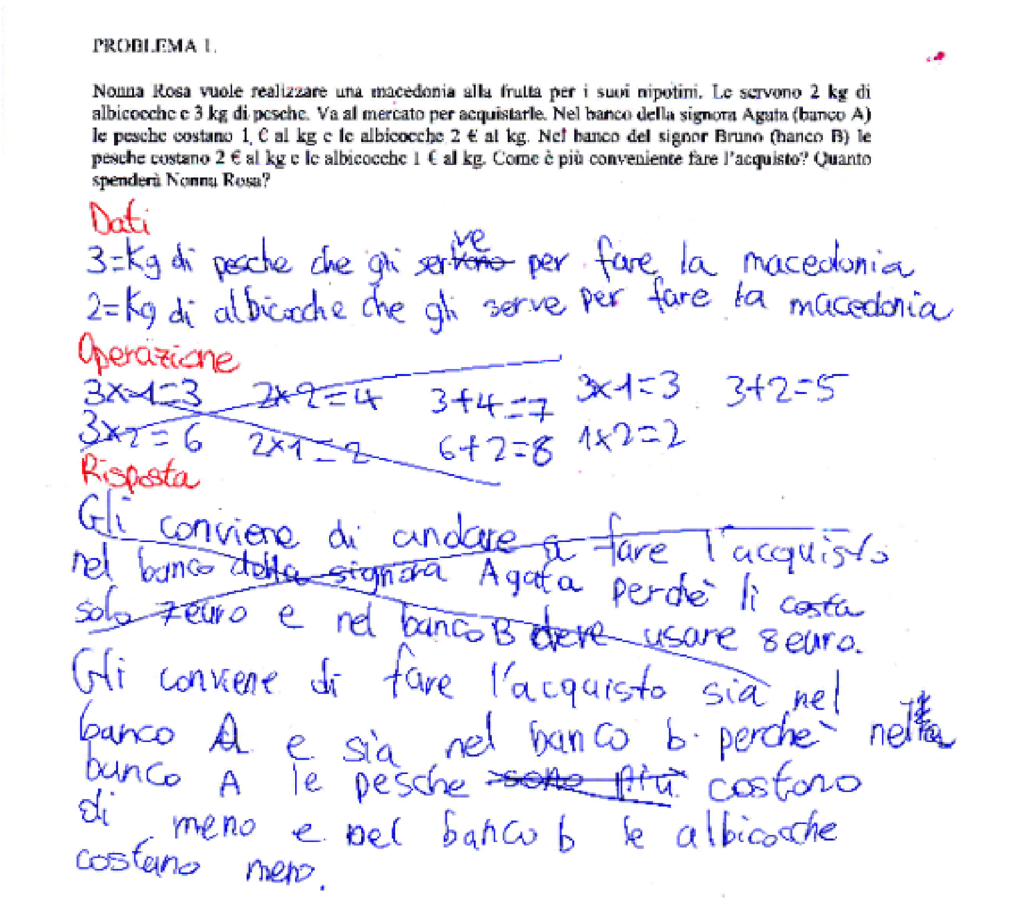
Quale percorso conviene fare a Pierino?

Dati
200m = lunghezza di via Garibaldi da casa di Pierino alla rotonda
800 m = lunghezza della via Garibaldi alla rotonda alla casa di Camilla.
750m = lunghezza di via Roma da casa di Pierino alla rotona
100m = lunghezza di via Roma dalla rotonda alla casa di Camilla.

Operazione
200+800=1000 750+100=850

Risposta
A Pierino conviene fare via Roma

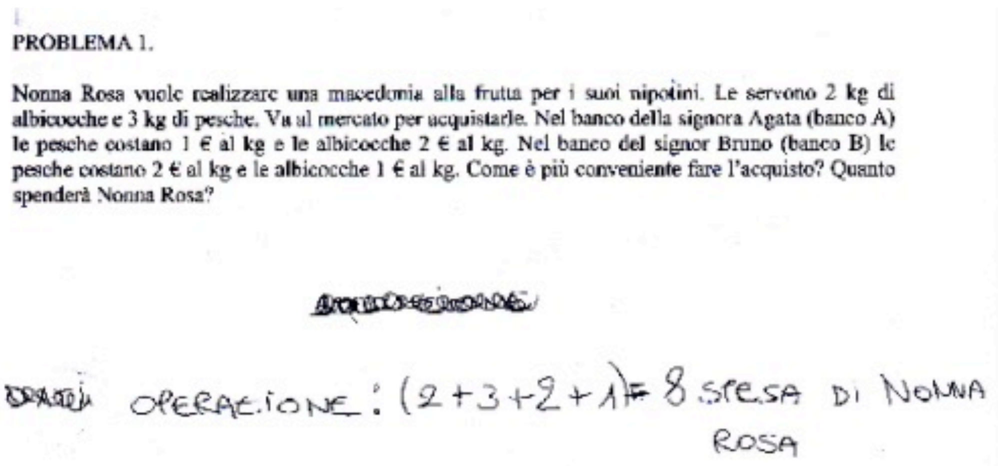
Figura 10. Altro esempio di risoluzione di tipo contrattuale del problema 3. Si noti l'uso del segno di uguaglianza.


PROBLEMA 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l’acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

Dati
3=kg di pesche che gli ~~servono~~ serve per fare la macedonia
2=kg di albicoche che gli serve per fare la macedonia
Operazione
~~3×1=3 2×2=4 3+4=7~~ 3×1=3 3+2=5
~~3×2=6 2×1=2 6+2=8~~ 1×2=2
Risposta
~~Gli conviene di andare a fare l'acquisto nel banco della signora Agata perchè li costa solo 7euro e nel banco B deve usare 8 euro.~~
Gli convene di fare l'acquisto sia nel banco A e sia nel banco b. perchè nel banco A le pesche ~~sono più~~ costono di meno e nel banco b le albicocche costano meno.

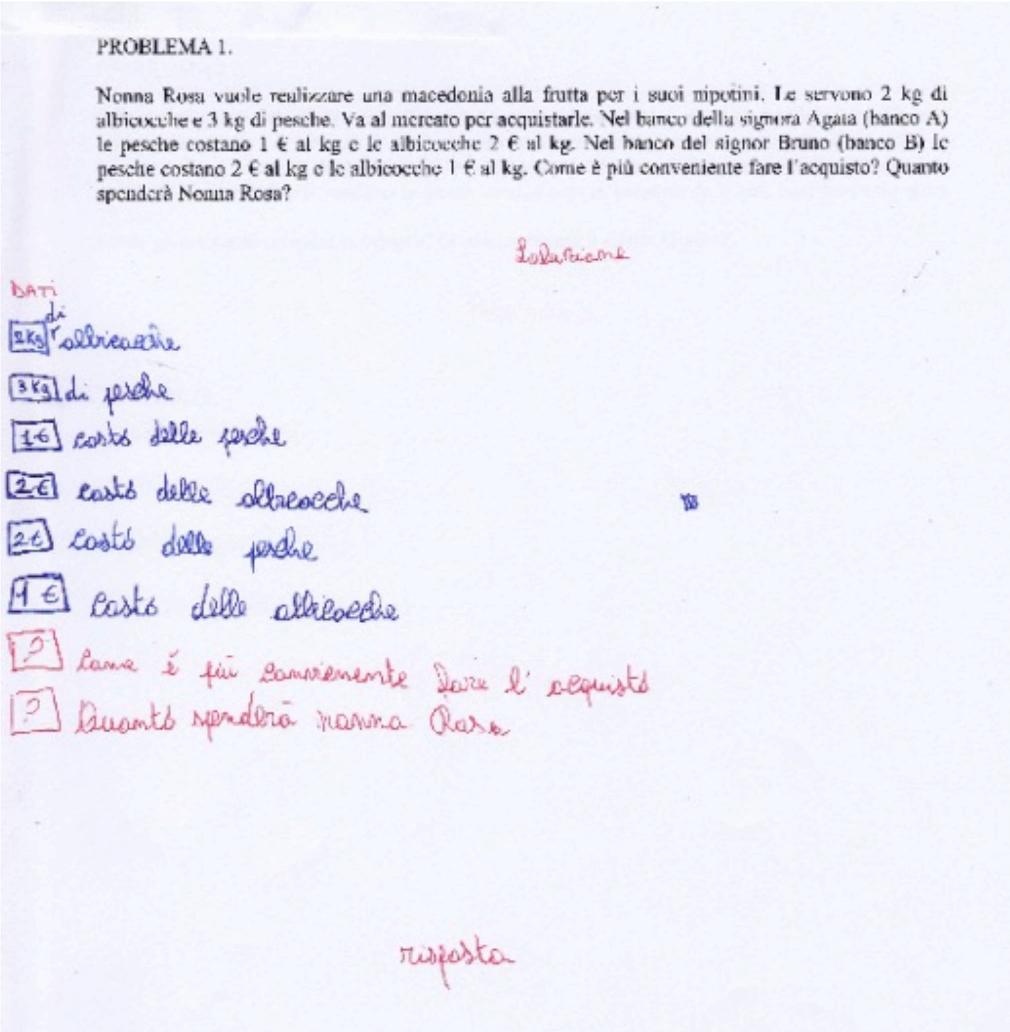
Figura 11. Risoluzione del problema 1 con metodologia creativa. Si noti il solito uso del segno di uguaglianza.


PROBLEMA 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l’acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

OPERAZIONE: (2+3+2+1)= 8 SPESA DI NONNA ROSA

Figura 12. Risoluzione del problema 1 mediante l’apparente somma dei dati numerici presenti nel testo. Questo caso è frequente.



PROBLEMA 1.

Nonna Rosa vuole realizzare una macedonia alla frutta per i suoi nipotini. Le servono 2 kg di albicocche e 3 kg di pesche. Va al mercato per acquistarle. Nel banco della signora Agata (banco A) le pesche costano 1 € al kg e le albicocche 2 € al kg. Nel banco del signor Bruno (banco B) le pesche costano 2 € al kg e le albicocche 1 € al kg. Come è più conveniente fare l'acquisto? Quanto spenderà Nonna Rosa?

Soluzione

DATI

$\boxed{2kg}$ di albicocche

$\boxed{3kg}$ di pesche

$\boxed{1€}$ costo delle pesche

$\boxed{2€}$ costo delle albicocche

$\boxed{2€}$ costo delle pesche

$\boxed{1€}$ costo delle albicocche

$\boxed{?}$ come è più conveniente fare l'acquisto

$\boxed{?}$ quanto spenderà nonna Rosa

risposta

Figura 13. Approccio alla risoluzione del problema 1; l'allievo costruisce l'apparato richiesto di tutti i dati presenti nel testo, ma si limita a questo.

Tutti i protocolli sono concretamente disponibili alla visione di chi volesse prenderne atto.

11. Conclusioni

Appare evidente l’influenza di vari fattori che descrivono la conduzione della risoluzione di problemi matematici da parte di bambini di V primaria. Di seguito ci limiteremo a richiamare ancora, esplicitandoli, alcuni punti che emergono da questa ricerca.

1. Presenza dell’effetto del contratto didattico che abbiamo chiamato “immaginare obblighi impliciti” che abbiamo descritto lungo il corso del testo e che costituisce il nucleo centrale del presente lavoro. Di esso sono succubi non solo gli studenti, ma anche un decisamente interessante numero di docenti.

2. Necessità di riesaminare il senso dei cosiddetti cdr nella pratica scolastica. Abbiamo già detto che i cosiddetti cdr non devono essere svolti in modo autonomo; essi devono proporre invece attività da svolgersi secondo modalità che costituiscano occasione di discutere, organizzare e pianificare risoluzioni, discutere, situazioni concrete reali, simulare la realtà e trattarla con strumenti matematici. Noi abbiamo approfittato della ricerca descritta per richiamare l’attenzione dei docenti su un possibile significato di realtà all’interno di un problema di tipo concreto, cioè poter acquistare merce in luoghi diversi approfittando dei diversi costi. Abbiamo considerato cioè i nostri come testi prototipici che illustrano situazioni concrete reali, specifiche dei cdr.

3. Esistenza di evidenti accordi forse espliciti sulle attese formali degli insegnanti; fra tutti, segnaliamo solo i seguenti:

- trascrivere in maniera talvolta assillante tutti i dati numerici e talvolta le loro interpretazioni;
- necessità di far uso di strumenti formali come i diagrammi di flusso anche a scapito della spontaneità.

Noi riteniamo che questo eccesso di richieste formali, all’inizio pensate per fornire un aiuto agli studenti in eventuale difficoltà nell’organizzare logicamente la risoluzione di un problema, finisce con l’allontanare lo studente stesso dalla lettura critica del testo del problema e dalla sua risoluzione. Lo studente finisce con il ritenere che la positività del suo elaborato consista nell’effettuare questi passi formali, richiesti dall’insegnante, con precisione. La risoluzione passa in secondo piano; anzi, talvolta, non è nemmeno più considerata necessaria.

4. Si rileva una mancanza di abitudine nel proporre testi di problemi una componente dei quali sia la necessità di fare una scelta e non solo una sequenza ordinata di calcoli. Per esempio, abbiamo visto che molti studenti, la grande maggioranza, ritiene che non sia lecito effettuare la spesa in due negozi diversi, o percorrere un percorso cambiando la strada a un certo punto, se questo non è chiaramente permesso magari in modo esplicito. Certo, è una delle caratteristiche interpretative che stanno alla base dell’effetto “immaginare obblighi impliciti”. Ci è sembrato molto interessante notare

come anche diversi insegnanti rivelino questa tendenza (per esempio quando chiedono al collaboratore alla ricerca se questo sia lecito), il che ci spinge a considerare sempre più il fattore che spinge lo studente a ipotizzare le attese del proprio insegnante come suo scopo e compito principali.

Ringraziamenti

Gli autori del presente articolo ringraziano:

- Anna Angeli, Mariamonica Cappelli, Margherita Francini, Ines Marazzani, Annarita Monaco e Malvina Nurrito, membri del NRD di Bologna, per la professionale e attenta collaborazione alla conduzione della ricerca;
- Miglena Asenova, Maura Iori e Giorgio Santi, membri del NRD di Bologna, per le preliminari letture critiche a precedenti versioni di questo testo e per i suggerimenti proposti;
- Sergio Vastarella per le informazioni fornite sul tema cdr;
- i due gentili e anonimi referee per i preziosi suggerimenti forniti.

Riferimenti bibliografici

Arrigo, G., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Frapolli, A., Frigerio, D., Sbaragli, S., & Villa, O. (2009). *Ostacoli epistemologici e didattici: Influenze delle convinzioni degli insegnanti sulla formazione concettuale degli studenti* (I e II parte). Poster esposto nel *V colloque sur la recherche dans les HEP: Formation et pratiques d'enseignement en questions*. Locarno, Svizzera, 23–24 aprile 2009.

Balacheff, N. (1988). Le contrat et la coutume: Deux registres des interactions didactiques. In C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque Franco-Allemand de didactiques des mathématiques et de l'informatique* (pp. 15–26). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Boero, P. (1986). Sul problema dei problemi aritmetici nella scuola elementare. *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, *9*(9), 48–93.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Modena: Digital Index.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: Convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*, *19*(2), 165–190.

D'Amore B., Fandiño Pinilla, M. I. (2013). Il passo più lungo: Sulla necessità di non buttare a mare (in nome di un vacuo modernismo) teorie di didattica della matematica che spiegano, in maniera perfetta, situazioni d'aula reali. *Bollettino dei docenti di matematica*, 66, 43–51.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2018a). Su alcuni termini che hanno avuto ampia rilevanza agli albori della costruzione scientifica della didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *26*(2), 247–291.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2018b). Relectura de un artículo publicado en

2000: ¿Qué queda?, ¿Qué perspectivas se alcanzaron?, ¿Qué metas son aún lejanas? In A. Avila (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática: 30 años de investigación en la revista* Educación Matemática (pp. 63–82). México: Sociedad Méxicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A. C. SOMIDEM.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2018). *El contrato didáctico en educación matemática*. Prólogo y epílogo de Guy Brousseau. Bogotá: Magisterio.

Ernest, P. (1998). The epistemological basis of qualitative research in mathematics education: A postmodern perspective. In A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education* [Monograph]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 22–39.

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica: Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento: Erickson. [Traduzione in lingua spagnola: Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Prólogo de Giorgio Bolondi. Bogotá: Magisterio].

Fandiño Pinilla, M. I. (2011). Per una buona didattica è necessario un buon Sapere. *Bollettino dei docenti di matematica*, 62, 51–58.

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica* (Tesi di dottorato di ricerca in Storia e Didattica delle Matematiche, Storia e Didattica della Fisica, Storia e Didattica della Chimica). Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Palermo. Disponibile da:
http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Tesi%20PhD%20Maura%20Iori.pdf

Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(3), 275–291. doi:10.1007/s10649-016-9726-3
https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-016-9726-3

Iori, M. (2018). Teachers' awareness of the semio-cognitive dimension of learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *98*(1), 95–113. doi:10.1007/s10649-018-9808-5
https://link.springer.com/article/10.1007/s10649-018-9808-5

Jaworski, B. (1998). The centrality of the researcher: Rigor in a constructivist inquiry into mathematics teaching. In A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education* [Monograph]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 112–127.

Knijnik, G. (2018). ¿Donde voy a hacer la compra? Educación matemática y otras preguntas, 21 anños después. In A. Avila (Ed.). *Rutas de la Educación Matemática: 30 años de investigación en la revista Educación Matemática* (pp. 52–62). México: Sociedad Méxicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática, A. C. SOMIDEM.

MIUR. (2015, 13 febbraio). *Circolare Ministeriale n. 3: Adozione sperimentale dei nuovi modelli nazionali di certificazione delle competenze nelle scuole del primo ciclo di istruzione*. Disponibile da:
http://www.istruzione.it/allegati/2015/CM_certificazione_comp_primo_ciclo000

1.pdf

Narváez Ortiz, D. (2017). Elementos para un estudio actual sobre el contrato didáctico, sus efectos y cláusulas. *La matematica e la sua didattica*, *25*(2), 181–189.

Schubauer-Leoni, M. L. (1988). L'interaction expérimentateur-sujet à propos d'un savoir mathématique: La situation de test revisitée. In A.-N. Perret-Clermont & M. Nicolet (Eds.), *Interagir et connaître* (pp. 251–264). Cousset: Delval.

Schubauer-Leoni, M. L. (1989). Problématisation des notions d'obstacle épistémologique et de conflit socio-cognitif dans le champ pédagogique. In N. Bednarz & C. Garnier (Eds.), *Construction des savoirs: obstacles et conflits* (pp. 350–363). Ottawa: Agence d'Arc.

RECENSIONI

John Alexander Cruz Morales, Lorena Ham e Arnold Oostra (Eds.). (2019). *Universales relativos: Festschrift Zalamea 2019*. Bogotá: Editorial Nomos.

Recensione di Bruno D'Amore

Nei giorni 1 e 2 marzo 2019 si è tenuto a Bogotá, in un auditorio ampio e bello dell'Universidad Nacional, un omaggio all'opera di Fernando Zalamea, in occasione del suo 60° compleanno, al quale ho avuto la fortuna di poter intervenire. Come si usa fare in questi eventi, 16 oratori (allievi, collaboratori, amici, estimatori, …) dell'opera di Fernando hanno avuto la parola, con la possibilità di esprimere il proprio parere su aspetti generali o specifici della sua opera.

I nomi degli intervenuti sono di tutto rispetto nell'ambito della matematica internazionale, soprattutto per quanto riguarda gli studi su categorie, logica, topologia, epistemologia; ma anche di altre discipline, come la semiotica peirceana, aspetti teorici/semiotici dell'architettura eccetera.

Il libro che appare citato nel titolo è la raccolta dei testi ai quali i 16 oratori si sono ispirati per la loro trattazione, non ne è la rigorosa e puntuale trascrizione totale.

L'opera di Zalamea è ben nota nei campi matematici e non, citati sopra; i suoi studi sull'opera di Peirce sono innovatori e profondi; grazie alla sua estrema, duttile e profonda competenza epistemologica, Zalamea è riuscito in una sintesi magistrale a riunire in discorsi unitari delle teorie e degli studi tra loro apparentemente diversi assai. Io sono un suo fanatico e onnivoro lettore e dunque riconosco nei testi presentati in suo onore magnifiche, ghiotte, precise visioni dettagliate, il cui insieme mi restituisce, confermandolo, quel che io penso di lui, un epistemologo visionario e profondo che riesce a rendere unici e univoci discorsi che ai più appaiono diversi e variegati. D'altra parte ho sempre considerato un capolavoro la sua opera:

> Zalamea, Z. (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

che mi ha costretto a mesi di durissimo e intenso lavoro di studio profondo e di apprendimento; ricordo che leggendolo, pensavo: Dio mio, che coraggio che ha quest'uomo.

Ho avuto modo di seguire alcuni suoi seminari e conferenze, l'ho avuto fra il pubblico a miei, abbiamo discusso in aula, a casa (di fronte a spaghetti alla carbonara), in convegni, era presente a Bologna l'8 ottobre 2016 (venuto a spese proprie da Bogotá), abbiamo perfino tenuto conferenze a due voci nell'Universidad Nacional e ho avuto l'ardire di presentare un suo lavoro folle:

Zalamea, F. (2006). Signos tríadicos. Lógicas, literaturas, artes. Nueve cruces latinoamericanos. *Mathesis*, Serie III, *1*(1), 1–164.[1]

in un'aula gremita fino all'inverosimile del suo Dipartimento di Matematica sempre della prestigiosa Universidad Nacional, alla presenza dell'Ambasciatrice d'Italia. Insomma, una militanza assidua comune fatta di mille occasioni.

Questo libro, quello del titolo, raccoglie dunque gli interventi tenuti nel Convegno in suo onore; si tratta di 16 testi, due appendici e altri materiali. I 16 testi sono divisi in 4 sezioni:

- Matematica: Charles Alunni, Yuri Poveda, Jaime Robayo, Juan Sebastián Arias;
- Filosofia della Matematica: Giovanni Maddalena, Andrés Villaveces, Alexander Cruz, Carlos Cardona;
- Studi Peirceani: Jaime Nubiola, Arnold Oostra, Douglas Niño, Lorena Ham;
- Saggistica: Carlos Tapia, Francia Elena Goenaga, María Del Rosario Acosta.

Le due appendici sono le seguenti:

- Andrés Villaveces: testo della presentazione fatta in occasione della nomina di Zalamea ad Accademico il 4 dicembre 2018 a Bogotá;

quel giorno ero presente alla cerimonia;

- Carlos Cardona: omaggio fatto a Zalamea nella stessa occasione.

Seguono poi un *Curriculum Vitae* di Zalamea, immagini di manoscritti, schemi e grafici realizzati durante suoi seminari, foto varie e un testo autobiografico di Zalamea stesso dal titolo *Dialogo*, in prima persona singolare.

Tutto ciò costituisce una meraviglia che ci permette di entrare nei dettagli di ciascuno dei suoi studi, ma che mi affascina soprattutto per quanto riguarda gli studi peirceani, la teoria delle categorie, la logica dei fondamenti, una rivoluzionaria visione dell'epistemologia e una capacità superba e unica di cogliere nessi e di evidenziare strumenti nuovi che solo Zalamea può vedere ed evidenziare con chiarezza [e poi, quando lui te li mostra, li vedi o almeno li intravvedi anche tu]. Ero presente, dicevo sopra, alla cerimonia nella quale veniva nominato membro dell'Accademia delle Scienze Esatte Fisiche e Naturali a Bogotá; tenne una conferenza superba presentando i suoi lavori e mi chiedevo come potessero capirne il senso profondo coloro che non avevano dedicato, come io ho fatto, mesi e mesi e mesi allo studio dei suoi scritti innovativi e pervasisi.

[1] Si notino i numeri di pagina: un libro, più che un articolo!

Fra i suoi lavori più dettagliati e innovativi c'è uno studio sistematico (che consta di 618 pagine fittissime) di alcune delle opere di Grothendieck:

Zalamea, F. (2019). *Grothendieck: Una guía a la obra matemática y filosófica*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Confesso di averlo ricevuto il 1° marzo 2019 e di essermi buttato a capofitto nel suo studio, ma sono talmente indietro che, forse, riuscirò a malapena a scriverne una breve recensione se va bene in ottobre, mentre sto scrivendo questa in maggio … Ha creato un magico labirinto … Ma se ne parlerà in quella occasione.

Torno al libro citato nel titolo. Pur nella varietà estrema dei riferimenti dei singoli oratori/autori, quel che mi sorprende è la costante unificante, i modi di vedere, di esporre, di citare, di indicare, di riferire. Se è la logica dei fasci a fare da filo conduttore, se è la teoria delle categorie che ci permette di dare un senso univoco, è però la libertà interpretativa, spietatamente logica ma vaporosa ed eterea, quella che costruisce i sensi che permeano in modi così diversi ogni passo, ogni autore.

Ho costantemente nel cuore (sì, sì, anche nel cervello) altre letture precedenti di Zalamea (che dico, letture … studi, altro che). E così mi permetto di osare di sperare di capire ponti culturali che sembrano attraversare il mondo della cultura, avventati ma progettati con sapienza, per primo da lui, da Zalamea, e poi dai suoi compagni di avventura (mi ci metto anch'io, visto che lui stesso mi cita come tale un paio di volte):

Zalamea, F. (2012). *Peirce's logic of continuity: A conceptual and mathematical approach*. Boston: Docent Press.

Zalamea, F. (2013). *Antinomias de la creación: Las fuentes contradictorias de la invención en Valéry, Warburg, Florenski*. Santiago de Chile: Fondo de Cultura Económica.

Zalamea, F. (Ed.). (2013). *Rondas en Sais: Ensayos sobre matemáticas y cultura contemporánea*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Se gli aspetti matematici mi sono più congeniali e sento di poterli seguire meglio, confesso di aver molto appreso e finalmente inteso dell'opera di Peirce grazie a Zalamea e ai suoi colleghi di viaggio, grazie anche a questo volume. Scrive Peirce (citato in questo libro da Giovanni Maddalena a pagina 63: "(…) le grandi menti sono capaci di afferrare una concezione fondamentale molto prima che il progresso dell'analisi abbia reso possibile il liberarla dalle oscurità e dalle difficoltà"; e faccio mia la conclusione dell'autore Maddalena (stessa pagina): "A questo prim'ordine di menti, a cui si devono i grandi passi della cultura e della storia umana, appartiene anche, e senza dubbio, Fernando Zalamea".

In quel giorno di ottobre citato sopra, a Bologna, Zalamea mi fece omaggio di un libro totalmente inatteso:

Novalis (1985). *La cristianità ossia l'Europa*. Milano: Studio Editoriale.

Credevo d'essere l'unico matematico al mondo a sapere chi fosse Georg Friedrich Philipp Freiherr von Hardenberg, e Zalamea l'aveva intuito leggendo le mie cose, sebbene io non l'avessi mai citato … Dunque, anche lui lo conosceva.

Il libro qui recensito è gratuitamente disponibile in formato pdf al seguente indirizzo, insieme ad altri volumi di Fernando Zalamea: https://unal.academia.edu/FernandoZalamea

Fernando Zalamea (2019). *Grothendieck: Una guía a la obra matemática y filosófica*. Bogotá: Universidad Nacional-Editorial Nomos.

Recensione di Bruno D'Amore

Lo ricordo ancora e lo ricorderò per sempre: era il 1974 quando, a Parma, nel corso di uno dei tanti fantastici seminari settimanali di Logica Matematica tenuti presso il Dipartimento di Matematica, uno degli invitati suggerì a tutti noi giovani di studiare l'opera di Alexander Grothendieck. Fu l'impresa culturale più complessa della mia vita; ma l'entusiasmo era tale che, tre anni dopo, pubblicando un articolo sul tema delle categorie, riuscii a citare (a proposito) un lavoro di questo gigante:

> A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku J., 9. 119-221, 1957.

(Allora si citava così, l'APA era ancora lungi dall'arrivare; tale mio lavoro venne pubblicato nelle Memorie della Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti di Modena, grazie all'interessamento del prof. Francesco Speranza).

Notai subito alcune cose: (1) che io stavo citando un lavoro di 20 anni prima!; (2) che, mentre il mio articolo constava alla fine di 9 pagine, questo di Grothendieck ne contava oltre 100; (3) che io avevo avuto sì qualche difficoltà nel leggere questo testo, ma che anche i miei colleghi erano stati colpiti dalla complessità enorme di questi discorsi.

(1) In quanto alle date, caspita, costui era in anticipo sui tempi in modo straordinario; (2) in quanto alla lunghezza, che allora fu per me sorprendente, diventato poi un fanatico dell'opera di G., appresi che 100 pagine erano per lui un nonnulla, che ha scritto testi di migliaia e migliaia di pagine (molte delle quali, oggi, ancora non lette ufficialmente); (3) in quanto alla difficoltà, succedeva una cosa strana: che, dopo ore e ore passate a leggere e rileggere

alcune righe, d'improvviso capivi come stavano le cose e ti sorprendevi per il coraggio scientifico di questo meraviglioso autore.

Diversi interessi maturati alcuni anni dopo mi hanno portato verso altri tipi di studio e di ricerca, ma la passione per gli scritti vigorosi e lungimiranti di G. mi ha sempre entusiasmato, mai ho smesso di leggerlo. Ma il sogno era quello di avere una sorta di guida, di opera omnia (oggi so che questo è impossibile) con i commenti di qualche esperto vero per accompagnare le letture.

E oggi, oggi… Fernando Zalamea, che è un super conoscitore del lavoro di G., ha iniziato un percorso che ha del sensazionale pubblicando il libro che sto cercando qui di presentare a tutti i lettori potenziali, trascrivendo, chiosando, raccontando, descrivendo l'opera di G. Si tratta del volume il cui titolo appare all'inizio di questo mio scritto, che consta di 622 pagine, elegante, cartonato, una vera opera d'arte, soprattutto per il suo contenuto. L'opera è così suddivisa:

- 24 pagine di introduzione metà delle quali sono dedicate all'appassionante biografia, oggi notissima, ma piena di dettagli, del nostro G. E poi la presentazione finissima e dotta di questo volume.
- 120 pagine dedicate all'opera di G. cosiddetta "del primo periodo" che va dal 1949 al 1957; e si scopre così che il lavoro da me citato nel mio articoletto nel 1977 è una sorta di chiusura di un'epoca.
- 130 pagine dedicate al "secondo periodo", dal 1958 al 1970, tempo della costruzione delle grandi opere al IHES, con la creazione dei fondamenti della geometria algebrica.
- 200 pagine dedicate al "terzo periodo" che va dal 1981 al 1991, periodo nel quale appaiono testi che non sono marcatamente ed esclusivamente matematici.
- 112 pagine di Zalamea che fornisce interpretazioni e analisi delle principali opere di G., una vera manna per chi inizia lo studio ora.
- 35 pagine di apparato bibliografico, indice dei nomi, delle opere e dei contenuti.

Grazie all'opera analitica e critica di Fernando Zalamea, è possibile leggere o rileggere i testi di matematica di G. con occhi più capaci di scrutare quel che all'inizio può apparire come indecifrabile; ciò perché, essendo G un creatore continuo appassionato e fantasioso, senza una guida non sempre si riesce a cogliere il senso preciso della creazione stessa. Sappiamo oggi che molte delle tematiche contemporanee hanno visto la luce proprio grazie all'intuizione sorprendente e magica di G., per esempio nel campo dei prodotti tensoriali topologici e della loro teoria metrica; la nascita dell'algebra omologica, le classi di fasci. La competenza di Zalamea è tale che egli ti accompagna nella lettura critica, per farti cogliere nessi e precisazioni che altrimenti potrebbero sfuggire al lettore. Poi c'è l'opera immensa sulla geometria, la rivisitazione moderna della teoria di Galois, una posta in discussione della geometria analitica totalmente nuova, la nascita della moderna geometria algebrica lungo il corso degli anni ’60. E ben altro.

Ma, per essere onesto, io sono conquistato anche parecchio dagli scritti non squisitamente tecnici, quelli che hanno titoli che alludono ad altro: *Récoltes et semilles* (1983-1986), 1500 pagine su che cos’è la creatività matematica; *La clef des songes* (1987-1988), sottotitolo: *Dialogue avec le Bon Dieu*, 1000 pagine dedicate a sue particolari visioni dell’esistenza e della vita, all’interpretazione dei propri sogni, speranze, desideri. Vale qui la pena ricordare che G. ebbe lunghi periodi di impegno civile, durante i quali spesso abbandonava la matematica per tornarvi dopo qualche anno, che spesso si allontanò dai centri accademici o anche solo abitati, per condurre una vita mistica e ascetica, come quella degli ultimi decenni, autoconfinatosi sui Pirenei. Ma queste sono cose fin troppo note, inutili da ripetere.

Vorrei invece far notare come Zalamea descriva tutto ciò, qualsiasi aspetto, con quel rigore che lo caratterizza come matematico e come epistemologo. Voglio ricordare un suo articolo pubblicato in Italia:

> Zalamea, F. (2016). Les portes sur l’univers: Sulla creatività matematica in Grothendieck. *La matematica e la sua didattica*, *24*(1–2), 41–57.

In quanto direttore della rivista, ricordo ancora il dilemma: pubblicare questo articolo nella sua lingua originale, o tradurlo in italiano per far sì che il nome di questo grande studioso colombiano, cominciasse a circolare? Alla fine, anche sulla base dei consigli dei miei collaboratori, alla fine si optò per questa seconda ipotesi. Ma la traduzione accurata richiese una delicatezza eccezionale.

Le note, ah le note! Le note di questo libro di Zalamea sono esse stesse un libro nel libro, meglio: tre libri in uno.

Ci sono note “normali” cioè che si riferiscono al testo principale. Ci sono note che si riferiscono alla bibliografia secondaria, un lavoro certosino e paziente che solo un vero esperto può compiere e che si rivela di interesse favoloso per chi voglia saperne di più. Ci sono note, infine, che si riferiscono alle tecniche matematiche che, a volte, sono incomprensibili se non c’è lì uno Zalamea pronto a spiegartele. Molte di esse sono di tipo biografico, di eccezionale interesse.

Ci sono anche le riproduzioni di manoscritti di G., di un interesse speciale profondo perché non sempre il nostro scriveva come scrive un matematico, ma si abbandonava spesso a schizzi e disegni che lì per lì ti sembra di non capire, come quelli sullo yin e yang in matematica e che, ancora una volta, solo un esperto a tutto campo come Zalamea sa puntualizzare e spiegare, dando loro sempre un senso.

E che dire dei riassunti? Al termine dei lunghi testi di G. è estremamente chiarificatore il sunto che ne dà Zalamea, spesso assai più che necessario.

I commenti di Zalamea sono incisivi e illuminanti, come quello che inizia a pagina 474 (*El corazón matemático y la razón categórica*) che introduce all'arte matematica di G.

Siccome poi Zalamea è un maestro assoluto internazionale per tutto quando riguarda Peirce, si resta sbalorditi dal fatto che riesce ad accostare il lavoro di G. a quello del logico-semiotico statunitense; è assai più di un'ipotesi, ogni spiegazione è del tutto convincente e illuminante. E solo la vasta cultura nei diversi campi della letteratura e dell'arte plastica permette a Zalamea altri accostamenti, questa volta non arditi perché prendono le mosse da quel che scrive lo stesso G. riferendosi ad alcune opere di letteratura, di musica o di pittura, un trionfo della cultura umana a tutto campo, senza limiti. Come quando (a pagina 551) Zalamea interpreta e spiega un riferimento fatto da G. alla celeberrima opera *Guernica* di Picasso.

Il cuore fa poi un balzo quando ti trovi citato e ringraziato per il nulla che hai dato come contributo a questi studi, segno solo di amicizia e di generosità da parte dell'autore Zalamea a cui va tutto il nostro plauso e il nostro entusiasmo.

Il colpo finale è il seguente. Se chi legge questa recensione sente irrefrenabile la spinta a leggere questo libro, sappia che lo può avere gratis, in pdf, scaricabile dal sito: https://unal.academia.edu/FernandoZalamea che raccoglie alcune delle opere di Zalamea.

Chissà che questo titanico sforzo non conduca i lettori italiani a voler conoscere l'opera di G. e, è il mio sogno, l'opera di Zalamea, per esempio i suoi libri dedicati alla storia e all'epistemologia della matematica (contemporanea), fra i quali svetta:

> Zalamea, Z. (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

E che dire delle relazioni (profonde, tangibili, ricche) fra pensiero matematico e pensiero dell'arte figurativa contemporanea? Pochi anni fa Zalamea condusse un pomeriggio-sera di discussione su questo tema, in occasione di una mostra delle opere dell'artista svedese Oscar Reutersvärd presso l'università Nacional a Bogotá; lui dirigeva i lavori, facendo domande su questo tema ai due ospiti entrambi italiani, Piergiorgio Odifreddi e Bruno D'Amore, di fronte a un'ambasciatrice di Svezia in Colombia a dir poco esterrefatta, dato che, appassionata d'arte e conoscitrice dell'arte svedese, confessò di essere stata, come dire, spiazzata tutta la sera.

Un libro completo, bello, appassionante, difficile, una sfida intellettuale.

Giovanni Giuseppe Nicosia (2019). *Contare per ventine: Un'analisi etnomatematica di numerali del mondo. Vol. I: Europa, Asia e Americhe.* Disponibile da: http://www.lulu.com/shop/giovanni-giuseppe-nicosia/contare-per-ventine-unanalisi-etnomatematica-di-numerali-del-mondo/ebook/product-24229523.html

Recensione di Silvia Sbaragli

Giovanni Giuseppe Nicosia non è nuovo nel mondo dell'etnomatematica, una disciplina che si è inserita nel panorama della ricerca da alcuni decenni e che si trova a metà strada tra la matematica e l'antropologia culturale. L'inizio del suo contributo scientifico su questo tema risale al 2002, quando si è occupato di tradurre in italiano il famoso libro *Etnomatematica* (D'Ambrosio, 2002), contributo imprescindibile per i ricercatori che vogliono approfondire lo studio delle pratiche matematiche dei diversi gruppi socioculturali. Ma, oltre a essere un ricercatore e un appassionato studioso di culture del mondo, Nicosia è anche un insegnante, e proprio dall'interesse per la didattica nasce il volume *Numeri e Culture* (Nicosia, 2008), libro nel quale l'autore riesce a dare un contributo all'educazione matematica dei giovani che vivono in un ambiente multiculturale.

In un certo senso, *Contare per Ventine: Un'Analisi Etnomatematica di Numerali del Mondo* è la continuazione di questa opera di avvicinamento del mondo scolastico, sempre più multiculturale, al mondo delle matematiche, intese come espressione culturale del sapere di un popolo.

In questo libro, che per desiderio dell'autore "appartiene al Popolo, che ne è il vero autore profondo", Nicosia tratta dei numerali e dei sistemi di numerazione dapprima nelle popolazioni europee e in Asia, poi nelle Americhe.

La quantità di culture prese in considerazione è impressionante. In Europa e in Asia si discutono i sistemi di numerazione georgiani, baschi, bretoni, gaelico irlandesi, gallesi, danesi ecc. Nelle Americhe si affrontano i numerali in uso nelle civiltà maya, atzeche, zapotechi, mesoamericane o messicane, e ancora i numerali waunana, andoque, macune ecc., provenienti dalle culture sudamericane; l'esposizione si conclude con il tentativo di raccogliere le informazioni concernenti i sistemi di numerazione in uso nei popoli indigeni dell'America del Nord. La ricerca in quest'ultimo caso è particolarmente complessa, sia a causa delle tradizioni principalmente orali di questi popoli, sia a causa di colonizzazioni e stermini avvenuti nel corso della storia.

Con questo testo, Nicosia dimostra di essere uno dei massimi cultori italiani della materia, con un'attenzione particolare alle applicazioni dei suoi studi in ambito educativo: l'autore sembra infatti essere estremamente consapevole di come il mondo multiculturale in cui è immersa la scuola al giorno d'oggi necessiti di una cultura dell'accoglienza e dell'inclusione. D'altra parte, per accogliere e includere è dapprima necessario essere disposti a conoscere non solo in modo superficiale, ma approfondito. Il contributo principale di questo volume sembra quindi essere il seguente: proporre una conoscenza effettiva di alcuni aspetti, quelli matematici, delle culture che sono lontane dalla nostra, con il fine di aiutare insegnanti, ricercatori, lettori interessati, a entrare nella relazione con ciò che è diverso con curiosità e spirito di confronto.

Riferimenti bibliografici

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatematica*. Bologna: Pitagora.
Nicosia, G. G. (2008). *Numeri e culture.* Trento: Erickson.

Bruno D'Amore e Silvia Sbaragli (2019). *La matematica e la sua storia.* Vol. III: *Dal Rinascimento al XVIII secolo*. Bari: Edizioni Dedalo.

Recensione di Gianfranco Arrigo

Gli autori, molto conosciuti e stimati, con questo nuovo volume continuano la loro serie *La Matematica e la sua Storia*, iniziata con la pubblicazione nel 2017 di *Dalle Origini al Miracolo Greco*, seguita nel 2018 da *Dal Tramonto Greco al Medioevo*.

Questo terzo volume ci offre uno spaccato matematico-storico-filosofico concernente il periodo *Dal Rinascimento al XVIII Secolo* e ci lascia presagire una prossima pubblicazione che potrebbe concludere il meraviglioso ciclo.

In esso si possono riconoscere chiaramente lo stile e il modo di interpretare i periodi dei volumi precedenti: un riuscitissimo amalgama di matematica, storia, filosofia e didattica, ciò che rende la lettura piacevole e interessante per molti lettori, dall'insegnante allo scienziato, dal matematico allo storico e al filosofo. Ma, conoscendo bene gli autori, oso affermare che sotto sotto hanno pensato soprattutto agli insegnanti. Perché se si vuole togliere dall'immagine scolastica della disciplina matematica quella stonata caratteristica di materia fredda, scontata, nella quale ogni studente si vede obbligato a mandare a memoria definizioni, teoremi e rigidi algoritmi, se si desidera abbracciare la matematica come disciplina culturale – ciò che le spetta –, una strada da seguire è certamente indicata da questa pubblicazione. Conoscere un po' di storia, di quella autentica (nei limiti del possibile), prendere atto che molte difficoltà incontrate dagli studenti di oggi si possono ritrovare in gran parte nei lavori di personaggi dai nomi altisonanti, sapere che molte conquiste della matematica sono costate anche duri contrasti fra gli studiosi, cambia notevolmente il rapporto tra disciplina e discente; da un lato perché la matematica si rivela una costruzione realizzata in parecchi millenni – e quindi non calata dall'alto, perfetta, invariabile –, dall'altro perché, portando a conoscenza dello studente le difficoltà e gli errori del passato, lo si tranquillizza di fronte alle difficoltà e lo si porta a concepire un'immagine diversa delle proprie difficoltà e degli errori. Fare matematica vuol dire anche incontrare ostacoli duri da superare, anche sbagliare, tentare percorsi diversi, fare tesoro del vissuto per non cadere negli stessi errori e per costruire una rete di relazioni fra gli apprendimenti, costruirsi una propria strategia di studio sempre suscettibile di miglioramento.

Tutto ciò è perfettamente riscontrabile nei vari capitoli di questo terzo volume.

Già all'inizio il lettore può rivivere, per esempio, la vicenda che nel secolo XIII coinvolge Tartaglia, Cardano, Ferrari e Dal Ferro a proposito della risoluzione, non ancora conosciuta, dell'equazione di terzo grado: un intreccio di sfide matematiche, di ricatti e di acuti imbrogli. Da leggere e meditare, in particolare, la traduzione in versi difficilmente comprensibili del metodo di risoluzione fatta da Tartaglia perché, per certe ragioni, doveva comunicarlo al professor Cardano dell'Università di Bologna, ma d'altra parte non voleva che costui se ne impossessasse facilmente.

Per uno studente, conoscere simili peripezie molto frequenti nella storia della matematica, è una bella lezione di umanità. Dai momenti di esaltazione (colpi di genio, idee brillanti) a quelli di sconforto, superabili grazie alla caparbietà, alla fatica e all'intelletto, gli studiosi hanno costruito a fatica quel grande edificio che è la matematica di oggi e che, a piccole dosi e molto parzialmente lo studente è tenuto ad apprendere sia per motivi di utilità sia soprattutto perché costruendosi la propria matematica – ovviamente sotto lo sguardo sapiente dell'insegnante – plasma la propria mente e acquisisce capacità utili in qualunque campo dello scibile.

E che dire del rapporto tra arte e matematica nel Rinascimento? Ecco un altro tema, in generale poco conosciuto. Chi guarda una mostra d'arte con occhi matematici? Eppure quasi sempre si può scoprire che dietro a un dipinto o a una statua o a un brano musicale o letterale si cela una struttura matematica che l'artista può aver concepito espressamente oppure anche inconsciamente. In merito, il Rinascimento costituisce un esempio importante perché proprio in quel periodo la pittura ha scoperto la prospettiva (che è matematica). Dal grande Piero della Francesca, pittore e matematico, al Brunelleschi a Leon Battista Alberti e a Leonardo da Vinci, autodidatta e genio multiforme, probabilmente il più conosciuto, per citare solo alcuni dei diversi personaggi del Rinascimento italiano.

La parte dedicata alla nascita del simbolismo moderno è un impareggiabile dono per tutti gli insegnanti, che sono chiamati a traghettare gli alunni dal campo numerico alla generalizzazione, quindi al calcolo letterale. Nella storia si è passati dall'*algebra retorica* (fin verso il XIV-XV secolo), a quella *sincopata* (tra il XV e il XVI secolo), per poi giungere all'*algebra simbolica*

(Viète e Descartes, XVI secolo), praticamente quella che si insegna oggi nelle scuole. Lo studente che è condotto a capire quanto sia stata grande e sofferta questa creazione troverà grande motivazione nell'apprendere, con tutti i vantaggi che ne derivano relativamente all'acquisizione di competenze.

René Descartes (italianizzato Cartesio) è anche ricordato per aver dato un contributo decisivo alla creazione della geometria analitica, della quale fanno conoscenza già gli alunni delle medie con l'apprendimento del sistema degli assi cartesiani, appunto, e che poi sviluppano nel corso degli studi liceali. Sarebbe quindi buona cosa che gli insegnanti facessero capire agli studenti come sia nata l'idea delle coordinate e quanto utili siano per lo studio e per l'applicazione anche a situazioni concrete.

Il tema dell'infinito matematico non poteva certamente mancare, viste le ricerche e gli studi che si sono fatti all'interno del Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica di Bologna;[2] infatti troviamo un bellissimo spunto che, se sfruttato in classe, può dare grande motivazione per una formazione corretta del concetto matematico di infinito: dall'infinitamente grande all'infinitamente piccolo. La lettura di queste pagine porta alla conoscenza dei grandi attori che hanno contribuito piano piano alla nascita dell'analisi matematica, cioè del calcolo differenziale e integrale. Sono pionieri della grande costruzione: Galileo, i suoi discepoli Cavalieri, Torricelli, Mengoli e altri ancora, fondatori del *metodo degli indivisibili*, molto simile al *metodo di esaustione*, ideato da Archimede, con il supporto teorico di Eudosso di Cnido, circa un millennio prima. Ma non si tratta per nulla di plagio, perché gli scritti di Archimede relativi a questo tema furono trovati solo nel 1906. Ecco un altro bello stimolo di riflessione in classe: il confronto tra il modo di procedere di Archimede e quello di Cavalieri e compagni.

In tale contesto, come ultimo atto, questo terzo volume arriva a toccare l'opera di Newton e Leibniz che, a cavallo dei secoli XVII e XVIII, diedero un contributo essenziale ai concetti di derivata e di integrale, materia che si tratta negli anni finali del liceo e che andrebbe presentata, almeno nelle fasi iniziali, anche da un punto di vista storico.

Nel prosieguo, il racconto si concentra maggiormente sulla matematica e presenta in modo chiaro e semplice questioni che sono conosciute anche dal grande pubblico.

Alludo, per esempio al cosiddetto "ultimo teorema" di Fermat, a proposito del quale lo stesso ebbe a scrivere, a margine del proprio manoscritto: "la dimostrazione l'ho completata, ma non ci sta nel piccolo spazio che ho a disposizione". Inutile dire che i matematici furono fortemente stimolati a cercare una loro dimostrazione, ciò che si è verificato soltanto nel 1995 con Andrew Wiles, cioè circa tre secoli dopo l'enunciazione di Fermat. Vista la natura della dimostrazione di Wiles che comprende concetti e metodi attuali

[2] Si veda ad esempio il testo (ora in riedizione presso un altro editore): Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2010). *Infiniti infiniti*. Trento: Erickson.

sicuramente non conosciuti da Fermat, oggi possiamo affermare con (quasi) sicurezza che il nostro eroe aveva… bluffato. Ma anche questo fatto è importante, perché contribuisce a rendere più umana l'immagine del matematico.

Un'altra bella occasione per rendere più stimolante lo studio dalla matematica ce la offre il matematico svizzero Leonhard Euler, che ha operato nel XVIII secolo, in gran parte nelle regge di San Pietroburgo e di Berlino. Gli autori non si sono lasciati sfuggire l'occasione per mostrare i suoi lavori sui grafi, ritenuti fondanti di una nuova branca della matematica, denominata *Topologia*: attività che possono coinvolgere anche gli allievi della scuola primaria. Chi non ha mai tentato di disegnare la famosa casetta senza alzare la matita dal foglio?

Gli ultimi capitoli si soffermano sia sull'evoluzione della geometria che si stacca dal pesante fardello euclideo, sia sull'algebra che conosce una vera rivoluzione grazie anche all'opera di personaggi per nulla comodi come Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel ed Evariste Galois.

A chi si interessa di calcolatrici, calcolatori e moderni computer, gli autori dedicano un intero capitolo. La storia del calcolo strumentale ha inizio dagli abachi e dai "bastoncini" di John Napier (italianizzato Nepero), prosegue con le prime addizionatrici meccaniche, poi con le più raffinate calcolatrici meccaniche elettriche per poi sfociare nei primi "calcolatori da tavolo" e nelle prime calcolatrici elettroniche tascabili. Di lì si inizia lo strabiliante sviluppo delle teorie dell'informatica e della comunicazione. Ma questa è un'altra storia.

La matematica e la sua didattica, Anno 27, n. 2, 2019

ISSN 1120-9968